



École Centrale des Arts et Manufactures
« École Centrale Paris »

THÈSE

présentée par

Vincent Leroy

pour l'obtention du

GRADE de DOCTEUR

Spécialité : Énergétique

Laboratoire d'accueil : Laboratoire d'Énergétique Moléculaire
et Macroscopique, Combustion (EM2C)
du CNRS et de l'ECP

Modélisation des couplages entre transferts conductifs, convectifs et radiatifs en milieu poreux

Soutenue le 30 janvier 2013

devant un jury composé de

Mme	BAILLIS	Dominique	Examinatrice
M.	BERNARD	Dominique	Examinateur
M.	FLAMANT	Gilles	Examinateur
M.	GOYEAU	Benoît	Directeur de thèse
M.	JOULAIN	Karl	Rapporteur
M.	QUINTARD	Michel	Rapporteur
M.	TAINÉ	Jean	Directeur de thèse

École Centrale des Arts et Manufactures
Grand Établissement sous tutelle
du Ministère de l'Éducation Nationale
Grande Voie des Vignes
92295 Châtenay-Malabry Cedex
Tél : +33(0)1 41 13 10 00

Laboratoire d'Énergétique
Moléculaire et Macroscopique,
Combustion (EM2C)
UPR 288, CNRS et École Centrale Paris
Tél : +33(0)1 41 13 10 31
Fax : +33(0)1 47 02 80 35

2013ECAP0013





À la mémoire de ma regrettée mère.





Résumé

Cette thèse aborde la question de la modélisation des transferts thermiques dans les milieux poreux soumis à de hautes températures. Un modèle macroscopique hors équilibre thermique local entre phases est obtenu par changement d'échelle. Cette procédure tient compte à l'échelle locale du couplage entre rayonnement et autres modes de transfert. Le modèle de rayonnement repose sur l'équation de transfert radiatif généralisée (GRTE) et, à la limite courante d'un milieu macroscopiquement optiquement épais, sur la loi de Fourier radiative.

L'originalité de cette procédure réside dans l'application de la méthode de prise de moyenne volumique (VAM) aux équations de bilan local, dans lesquelles les transferts radiatifs sont inclus. Cette homogénéisation couplée soulève trois difficultés :

- Les différents transferts sont de natures différentes. Le système matériel (site de transferts conductifs et convectifs) coexiste avec le champ des photons qui est homogénéisé par une méthode statistique reposant sur la caractérisation des propriétés radiatives au moyen de fonctions de distribution continûment définies sur le volume du milieu poreux.
- Les échelles de longueur mises en jeu dans la procédure de changement d'échelle doivent être compatibles entre elles. On établit que la séparation des échelles, requise par la prise de moyenne volumique, est compatible avec l'échelle de longueur caractéristique de l'homogénéisation statistique radiative, seulement limitée par la résolution d'une tomographie du milieu.
- Le phénomène d'émission dépend de la température de la matière. Cette température spécifique au calcul radiatif est obtenue en appliquant un opérateur de prise de moyenne à la température de la matière sur une échelle locale représentative. En pratique, c'est la résolution de cette prise de moyenne qui définit l'échelle des couplages locaux avec la méthode VAM.

Le modèle macroscopique résultant est appliqué à la résolution d'un problème unidimensionnel et stationnaire. Dans ce cas simple, le rôle du couplage avec le rayonnement à l'échelle locale est mis en évidence.



Abstract

This thesis deals with the modeling of heat transfer in porous media subjected to high temperature. An upscaling procedure yields a macroscopic model based on local thermal non-equilibrium. This procedure accounts for local scale coupling effects between radiation and other transfer modes. Radiation modeling uses the generalized radiation transfer equation (GRTE) and, at the commonly encountered limit of a macroscopically optically thick medium, the radiative Fourier law.

An original feature of this procedure is the application of the volume averaging method (VAM) to local conservation equations in which radiation transfer is included. This raises three major challenges:

- The physical natures of the various transfer modes involved are different. The material system (in which conduction and convection occur) coexists alongside with the photon field, which is homogenized using a statistical method based on the characterization of the radiative properties through statistical distribution functions, continuously defined over the whole volume of the porous medium.
- The length scales involved in the upscaling procedure must be compatible with each other. The compatibility of the scale separation constraint (required by the VAM) with the length scale of the radiative homogenization technique (which is limited by the resolution of a tomography of the medium) is established.
- The emission phenomenon depends on the temperature of matter. This temperature, specific to the radiation calculation, is obtained by applying a dedicated averaging operator. This operator is associated with an averaging volume whose length scale has to be representative at the local scale. In practice, the resolution of this averaging procedure defines the scale of the coupling between the VAM and the radiation model.

The resulting macroscopic model is applied to a one-dimensional, steady case. The solving of this simple case shows the influence of local coupling effects.



Remerciements

VOICI L'ABOUTISSEMENT de trois années de travail qui se sont déroulées au laboratoire EM2C, à l'École Centrale Paris. Mon doctorat et tout ce qui l'a entouré n'aurait bien entendu pas été possible sans le concours des nombreuses personnes qu'il m'a été donné de côtoyer durant cette période. J'aimerais saluer toutes celles et tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à ce projet.

Je remercie tout d'abord les hommes ayant co-dirigé cette thèse, messieurs Jean Taine et Benoît Goyeau. Les discussions que j'ai pu avoir avec eux ont été pour moi une source précieuse d'enrichissement professionnel et personnel. Au contact de ces chercheurs aux qualités scientifiques indiscutables, j'ai trouvé de l'inspiration pour mon projet scientifique et pour ma future carrière. Je tâcherai de tirer le meilleur parti de leurs enseignements pour élaborer le profil du chercheur et de l'enseignant idéaux que j'aspire à devenir. C'est en grande partie à eux que je dois la motivation que j'ai acquise à poursuivre une carrière académique.

J'ai aujourd'hui le privilège d'avoir été entendu pour ma soutenance par un jury composé de personnes de grande valeur, et je remercie madame Dominique Baillis et messieurs Dominique Bernard, Gilles Flamant, Karl Joulain et Michel Quintard pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. J'ai également eu le plaisir de rencontrer brièvement messieurs Michel Quintard et Dominique Bernard plus tôt au cours de mon travail de thèse pour résoudre des difficultés ponctuelles et je les remercie spécialement pour l'attention avec laquelle ils ont abordé mes problèmes et l'expertise de qualité qu'ils ont fournie pour y apporter des solutions.

La mission d'enseignement que j'ai effectuée au cours de ces trois années a été un élément central du développement de mon projet professionnel. J'ai été

REMERCIEMENTS

aidé de près dans cet aspect de mon activité par Fabien Bellet, que je remercie chaleureusement. Le soin et la rigueur qu'il apporte à la réalisation de ses activités d'enseignement sont exemplaires et sont des sources d'inspiration précieuses. Je tiens également à le remercier pour l'aide qu'il m'a apportée dans la résolution de quelques difficultés scientifiques.

L'environnement de travail dans lequel j'ai pu évoluer depuis octobre 2009 a également été un élément de grande satisfaction. Je remercie l'ensemble du personnel administratif et technique du laboratoire sans qui, bien entendu, tout cela n'aurait pas pu avoir lieu.

Je ne pourrai jamais assez remercier tous mes amis, du laboratoire et d'ailleurs, en particulier Da Xu, Laurent Soucasse, Adrien Lemal, Jean Lamoureux, Florent Saint, Julien Jarrige et Alessandro Scarpato, collègues de bureau d'hier et d'aujourd'hui. Je remercie François, Aurélien, Clément, Laurent, Fabien, Marien, François, Carolyn, Megan, Marie, Thibault, Théodore, Benedetta, Aymeric, Diane, Raphaël, Alexandre, Jessica, Salim, Valentin, Aline, Stéphane, Loïc, Nicolas, Yousra, Sergei, Jacques, et tant d'autres. Je demande pardon à celles et ceux dont j'aurais omis le nom, ils savent combien ma gratitude est grande.

Je remercie aussi l'ensemble de ma famille, et plus particulièrement ma chère grand-mère Marie-Lise, mon grand-père Jean, papa, Valérie, Claudine, Sylvain, Marin, Ninon, Edgar et Manuela qui ont dû me subir sous leur toit à un moment ou l'autre. Certains savent dans quelles conditions j'ai dû terminer ce travail, et c'est pourquoi je dédie cette thèse à ma regrettée mère, que l'on enterre seulement aujourd'hui. J'adresse ma gratitude infinie à mon oncle David et mes tantes Odile et Emmanuelle ainsi que leurs familles respectives, sans qui l'affrontement de la mort de ma mère et de toutes les difficultés que cela a engendré aurait tout simplement ruiné la préparation de cette soutenance.

Enfin, je remercie la Direction de la Recherche de l'École Centrale, qui a financé ce projet du 1^{er} octobre 2009 au 30 septembre 2012.

— Vincent Leroy, le 30 janvier 2013

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Modélisation des transferts dans les milieux poreux	2
1.2	Traitement des problèmes de transferts couplés	6
1.3	Définition du problème	6
1.4	Objectifs et structure de la thèse	9
2	Homogénéisation statistique du rayonnement	11
2.1	Caractérisation des milieux	12
2.2	Modélisation des transferts radiatifs : GRTE	19
2.3	Limite d'un milieu optiquement épais	25
2.4	Exemple d'application : caractérisation d'un milieu	28
2.5	Conclusion : particularités du modèle	38
3	Méthode de changement d'échelle couplé	41
3.1	Équations de base	43
3.2	Compatibilité des échelles de longueur	44
3.3	Construction d'un modèle couplé à l'échelle locale	47
3.4	Changement d'échelle	49
3.5	Méthode de résolution	57
3.6	Cas d'une phase semi-transparente	60
3.7	Conclusion	60
4	Résolution d'un problème macroscopique de transferts couplés	63
4.1	Définition du problème	63

TABLE DES MATIÈRES

4.2	Modèle de transferts	66
4.3	Caractérisation du milieu	69
4.4	Résolution numérique du problème macroscopique	85
4.5	Conclusion	97
5	Conclusion	99
A	Publication soumise à la revue <i>Transport in Porous Media</i>	103
A.1	Introduction	107
A.2	Challenges of coupling	109
A.3	Homogenization of the radiation field	111
A.4	Macroscopic modeling	116
A.5	Numerical determination of the averaged properties	131
A.6	Conclusion	133
	References	136
B	Résolution numérique de problèmes de fermeture	139
B.1	Géométrie	140
B.2	Champ de vitesse	140
B.3	Propriétés effectives de transport	141
C	Étude préliminaire pour un cas macroscopique unidimensionnel	155
C.1	Problème aux limites	155
C.2	Validation	159
C.3	Influence des conductivités effectives	159
C.4	Influence du coefficient d'échange	161
C.5	Influence du terme convectif	161
C.6	Conclusion	162
	Bibliographie	163

Table des figures

1.1	Principe du couplage macroscopique	7
1.2	Principe d'une hypothétique méthode de changement d'échelle unifiée	7
1.3	Principe d'une méthode à changements d'échelle successifs	8
2.1	Cas d'extinction dans la configuration O/T	14
2.2	Cas d'extinction dans la configuration ST/ST	15
2.3	Systèmes de coordonnées pour le terme source de diffusion	23
2.4	Domaine de tir pour la caractérisation radiative des milieux DOTS	31
2.5	Variables intervenant dans la caractérisation radiative d'un milieu DOTS	31
2.6	Passage à des grandeurs dimensionnées	32
2.7	Fonction de distribution cumulée d'extinction d'un milieu IOTS	33
2.8	Probabilité cumulée d'absorption d'un milieu IOTS	34
2.9	Exemples de fonctions de phase de diffusion d'un milieu IOTS	35
2.10	Coefficient d'extinction généralisé adimensionné d'un milieu IOTS en fonction de la porosité	36
2.11	Comparaison du coefficient d'extinction généralisé adimensionné avec le coefficient d'extinction adimensionné obtenu par la méthode RDFI pour un milieu DOTS	37
2.12	Coefficient d'absorption généralisé adimensionné d'un milieu IOTS	37
3.1	Principe de la démarche de changement d'échelle	42
3.2	Échelles de longueur de la prise de moyenne volumique	46
3.3	Volumes de prise de moyenne	48
3.4	Logigramme de la séquence de résolution	59

TABLE DES FIGURES

4.1	Grappe de cylindres (agencement équilatéral)	64
4.2	Coefficient d'extinction global adimensionné en fonction de la porosité pour un agencement équilatéral	72
4.3	Conductivité effective adimensionnée $k_{ff,xx}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$) . .	79
4.4	Conductivité effective adimensionnée $k_{ss,xx}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$) . .	79
4.5	Vecteur pseudo-convectif adimensionné $u_{ff,x}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$) . .	80
4.6	Vecteur pseudo-convectif adimensionné $u_{sf,x}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$) . .	81
4.7	Valeur du coefficient de distribution ξ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$)	82
4.8	Valeur du coefficient $Ap_{f,x}$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$)	83
4.9	Valeur du coefficient $Ap_{s,x}$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$)	83
4.10	Conductivité radiative en fonction de la température pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$, $a = 2 \times 10^{-2}$ m)	89
4.11	Champ de température en fonction de l'abscisse adimensionnée x^+ ($k_s/k_f = 10$)	89
4.12	Comparaison des termes dans le bilan d'énergie macroscopique ($Pe = 100$)	95
4.13	Comparaison des termes dans le bilan d'énergie macroscopique ($Pe = 1000$)	96
A.1	Averaging volumes.	110
A.2	Flowchart of the iterative sequence.	123
A.3	Geometry of the equilateral array of cylinders.	131
A.4	Longitudinal thermal dispersion tensor for in-line (left) and staggered array of cylinders (right). $\Pi_f = 0.38$	132
A.5	Distribution coefficient. $\Pi_f = 0.80$	134
A.6	Radiative flux average coefficient for the fluid (left) and the solid (right) phases. $\Pi_f = 0.80$	134
B.1	Géométrie des agencements considérés	140
B.2	Champs \mathbf{v}_f^+ et $\ \mathbf{v}_f^+\ $	142

Table des figures

B.3	Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement carré)	144
B.4	Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement alterné)	146
B.5	Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement carré)	148
B.6	Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement alterné)	150
B.7	Coefficient d'échange	152
B.8	Coefficient de distribution	153
C.1	Champs de température adimensionnée en fonction de x^+ (validation)	160



Liste des tableaux

2.1	Relations géométriques dans les milieux DOTS	30
4.1	Valeur de la constante $C_{k_w^R}$ pour le calcul de la conductivité radiative	71
4.2	Valeur de aK_w^{eff} en fonction de Π_f et g_w pour des cylindres en agencement équilatéral	73
4.3	Valeur de la moyenne et de la variation relative de $(Ah)^+$ entre $Pe = 0,1$ et $Pe = 1000$	82
4.4	Calculs macroscopiques : résultats	90
C.1	Cas tests : paramètres et résultats	157



Nomenclature

Symboles romains

A	Aire interfaciale par unité de volume du milieu poreux [m^{-1}]
\mathcal{A}^R	Interface fluide-solide ou aire interfaciale dans \mathcal{V}^R [m^2]
\mathcal{A}^m	Interface fluide-solide ou aire interfaciale dans \mathcal{V}^m [m^2]
a	Espacement inter-centre pour les treillis de cylindres [m]
$\mathbf{b}_{\gamma_1\gamma_2}$	Variables de fermeture pour les déviations du champ de température (problèmes I et II) [m]
$c_{p\gamma}$	Capacité thermique massique de la phase γ [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]
$f_{\gamma,\nu}^{\text{ext}}$	Fonction de distribution d'extinction
$G_{\gamma,\nu}^{\text{ext}}$	Fonction de distribution cumulée d'extinction ; fréquence ν omise pour un milieu gris
g_γ	Paramètre d'asymétrie de la diffusion
h	Coefficient de transfert thermique effectif [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$]
$I_\nu^\circ(T)$	Luminance d'équilibre (« de corps noir ») à la température T [$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$]
$I_{\gamma,\nu}, I_{\gamma,\nu}^l$	Luminance [$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$]
\mathbb{K}_γ	Tenseur de perméabilité [m^2]
$\mathbb{K}_{\gamma_1\gamma_2}$	Tenseur de diffusion-dispersion [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
$k_\gamma^R, k_{\gamma_1\gamma_2}^R$	Conductivité radiative [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
k_γ	Conductivité thermique [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
L	Taille caractéristique macroscopique [m]
l_γ	Taille caractéristique de la phase γ à l'échelle locale [m]
l_t	Résolution de la tomographie [m]

NOMENCLATURE

$\mathbf{n}_{\gamma_1\gamma_2}$	Normale à l'interface orientée de la phase γ_1 vers la phase γ_2
$n_{\gamma,\nu}$	Indice optique
$p_{\gamma}^R, \mathcal{P}_{\gamma}^R$	Puissance radiative par unité de volume [W m^{-3}]
$p_{\gamma,\nu}^a, p_{\gamma,\nu}^{sc}, p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \nu}^{sc}$	Probabilités cumulées d'absorption et de diffusion ; fréquence ν omise pour un milieu gris
$p_{\gamma}, p_{\gamma_1\gamma_2}$	Propriété effective associée aux hétérogénéités macroscopiques du rayonnement [m]
p_{γ}	Pression [Pa]
$p_{\gamma,\nu}, p_{\gamma,\nu}^{\text{spec}}, p_{\gamma,\nu}^{\text{diff}}$	Fonction de phase de diffusion ; fréquence ν omise pour un milieu gris
\mathbf{q}_{γ}^R	Vecteur flux radiatif [W m^{-2}]
R	Rayon [m]
\mathbf{r}	Vecteur position [m]
r^R	Taille du volume de prise de moyenne (rayonnement)
r^m	Taille du volume de prise moyenne (matière)
r_{γ}	Variables de fermeture pour les déviations du champ de température (problème IV) [$\text{K W}^{-1} \text{m}^2$]
$S_{\gamma,\nu}, S_{\gamma,\nu}^e, S_{\gamma,\nu}^{sc}$	Terme source dans la GRTE [$\text{W m}^{-3} \text{sr}^{-1}$]
s, s'	Abscisse curviligne le long d'un rayon [m]
s_{γ}	Variables de fermeture pour les déviations du champ de température (problème III)
T_{γ}	Température [K]
\mathbf{u}	Vecteur unitaire de direction
$\mathbf{u}_{\gamma_1\gamma_2}$	Vecteur pseudo-convectif [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$]
\mathcal{V}^R	Volume de prise de moyenne radiative
\mathcal{V}_{γ}^R	Volume de la phase γ dans \mathcal{V}^R [m^3]
\mathcal{V}^m	Volume de prise de moyenne
\mathcal{V}_{γ}^m	Volume de la phase γ dans \mathcal{V}^m [m^3]
\mathbf{v}_{γ}	Vecteur vitesse [m s^{-1}]

Symboles grecs

α, α_{γ}	Coefficient liant le terme source radiatif et sa moyenne
$\alpha_w^{\text{h,spec}}$	Absorptivité de paroi hémisphérique
$\alpha_w^{\text{spec}}, \alpha_w^{\text{diff}}$	Absorptivité de paroi directionnelle

Nomenclature

$B_{\gamma,\nu}$	Coefficient d'extinction généralisé à l'équilibre ; fréquence ν omise pour un milieu gris [m^{-1}]
β^{ot}	Coefficient d'extinction à la limite d'un milieu optiquement mince [m^{-1}]
$\beta_{\gamma,\nu}$	Coefficient d'extinction à l'équilibre pour un milieu beerien ; fréquence ν omise pour un milieu gris [m^{-1}]
Θ_{γ}	Température homogénéisée (modèle de rayonnement)
$K_{\gamma,\nu}$	Coefficient d'absorption généralisé à l'équilibre ; fréquence ν omise pour un milieu gris [m^{-1}]
$\kappa_{\gamma,\nu}$	Coefficient d'absorption à l'équilibre pour un milieu beerien ; fréquence ν omise pour un milieu gris [m^{-1}]
λ	Longueur d'onde [m]
μ_{γ}	Viscosité dynamique [Pa s]
ν	Fréquence [Hz]
$\xi_{\gamma}, \xi_{\gamma_1\gamma_2}$	Coefficient de distribution macroscopique
Π_{γ}	Fraction volumique de la phase γ
ρ_{γ}	Masse volumique [kg m^{-3}]
$\Sigma_{\gamma,\nu}, \Sigma_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \nu}$	Coefficient de diffusion généralisé ; fréquence ν omise pour un milieu gris [m^{-1}]
σ	Constante de Stefan-Boltzmann [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$]
$\sigma_{\gamma,\nu}$	Coefficient de diffusion pour un milieu beerien ; fréquence ν omise pour un milieu gris [m^{-1}]
$\tau_{\gamma,\nu}$	Transmittivité ; fréquence ν omise pour un milieu gris
$\varphi_{\gamma}^{\text{R}}$	Flux radiatif [W m^{-2}]

Indices

f	Fluide
s	Solide
w	Paroi
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$	Indice générique pour une phase (f, s ou w)

Exposants

a	Absorption
diff	Diffus
e	Émission
eff	Effectif

NOMENCLATURE

ext	Extinction
h	Hémisphérique
(j)	j^{e} ordre de perturbation
l	Quittant une frontière (rayonnement)
R	Radiatif
sc	Diffusion
spec	Spéculaire
+	Adimensionnement

Notations spéciales

$\langle \cdot \rangle^{\text{m}}$	Opérateur de prise de moyenne volumique
$\langle \cdot \rangle^{\mathcal{A}}$	Opérateur de prise de moyenne sur la surface \mathcal{A}
$\langle \cdot \rangle^{\text{R}\gamma}$	Opérateur de prise de moyenne volumique radiative intrinsèque associé à la phase γ
$\langle \cdot \rangle^{\text{m}\gamma}$	Opérateur de prise de moyenne volumique intrinsèque associé à la phase γ
\sim	Déviation



Chapitre 1

Introduction

LA MODÉLISATION et la compréhension du couplage entre les transferts radiatifs, conductifs et convectifs est un sujet d'intérêt majeur dans de nombreuses applications. De nombreuses configurations peuvent rendre nécessaire la modélisation du couplage entre modes de transfert. Dans le cas de milieux homogènes, on rencontre notamment ces phénomènes dans des problèmes mettant en jeu des températures élevées (industrie verrière, feux de forêt, propulsion aéronautique, production d'énergie thermique, etc.).

De nombreux domaines industriels font appel à la modélisation des transferts thermiques à haute température dans les milieux poreux. On citera à titre d'exemple la modélisation des transferts dans les brûleurs poreux (HOWELL et al., 1996 ; S. WOOD et HARRIS, 2008), dans les cœurs de réacteurs nucléaires (DUVAL, 2002 ; CHAHLAFI, 2011) ou dans certaines installations de production d'énergie solaire (DOMBROVSKY et al., 2009 ; MAAG et al., 2009). Cependant, selon S. WOOD et HARRIS (2008), les phénomènes de couplage des modes de transfert (auxquels s'ajoutent souvent des couplages supplémentaires avec des réactions chimiques et du transfert de masse et de quantité de mouvement) sont encore mal compris, peu d'études ayant été dédiées à leur compréhension dans les cas où les transferts radiatifs jouent un rôle important.

1. INTRODUCTION

1.1 Modélisation des transferts dans les milieux poreux

Un milieu poreux comprend au moins deux phases et est caractérisé par deux échelles de longueur. La première, qui sera dite *échelle locale* dans la suite, correspond à la taille caractéristique des pores ou des particules composant le milieu. Cette échelle de longueur est aussi appelée *échelle du pore* dans la bibliographie. La seconde, dite *échelle macroscopique* dans la suite, correspond à la taille caractéristique du domaine sur lequel le problème physique considéré est résolu. Cette échelle de longueur est aussi appelée *échelle du système* ou *échelle continue* dans la bibliographie. Dans un milieu poreux, l'échelle locale est très petite devant l'échelle macroscopique : elles sont *séparées*.

Si, lorsque la physique des milieux continus est valable à l'échelle du pore, les mécanismes de transport dans le milieu poreux sont les mêmes que dans les milieux homogènes, la séparation entre les échelles rend impossible l'utilisation des équations de conservation pour décrire les transferts dans tout le système : le coût en calcul serait prohibitif, car un maillage de bonne qualité sur l'ensemble du système macroscopique comprendrait un nombre de mailles trop grand. Il est donc nécessaire de recourir à des modèles de transfert qui vont substituer au milieu réel un milieu homogène équivalent. Ces modèles peuvent être élaborés de façon phénoménologique, ou à partir de la physique locale au moyen de méthodes de changement d'échelle que nous allons brièvement présenter dans cette section.

1.1.1 Rayonnement

Une difficulté que l'on rencontre dans l'homogénéisation des transferts radiatifs est la différence entre la nature réelle des phénomènes de transfert et leur représentation homogénéisée. Dans l'exemple du cas d'un milieu composé d'une phase opaque et d'une phase transparente, les rayons peuvent être réfléchis ou absorbés sur une surface. Cependant, dans le milieu homogénéisé, ces phénomènes sont traduits en termes d'absorption et de diffusion en volume. Le milieu homogénéisé est semi-transparent, tandis que la phase réelle de propagation du rayonnement est transparente. Dans le cas d'une phase semi-transparente, les rayons peuvent, à l'échelle du pore, être absorbés et diffusés en volume ou réfléchis et transmis à l'interface avec une phase transparente ou semi-transparente ; la représentation homogénéisée de ces phases est semi-transparente, mais elle a des propriétés radiatives différentes de la matière

1.1. Modélisation des transferts dans les milieux poreux

homogène qui les compose.

Les transferts sont souvent modélisés au moyen d'un modèle empirique beerien (c.-à-d. que l'extinction y suit une loi exponentielle en fonction de l'épaisseur optique). Les milieux semi-transparentes beeriens sont caractérisés par des coefficients d'absorption (κ_v), de diffusion (σ_v) et d'extinction (β_v), ainsi qu'une fonction de phase de diffusion (p_v), qui dépend généralement seulement du cosinus de l'angle de diffusion¹. Les transferts radiatifs sont alors modélisés au moyen de l'équation de transfert du rayonnement (ETR). La revue détaillée de BAILLIS et SACADURA (2000) montre que les efforts se sont essentiellement portés sur l'amélioration de la détermination des propriétés effectives de transport jusqu'aux années 2000. Les études alors réalisées supposaient les milieux beeriens : l'extinction du rayonnement y était supposée exponentielle en fonction de l'épaisseur optique.

Des méthodes populaires de caractérisation (ARGENTO et BOUVARD, 1996 ; BAILLIS, ARDUINI-SCHUSTER et al., 2002 ; COQUARD et BAILLIS, 2004 ; HENDRICKS et HOWELL, 1996 ; LORETZ et al., 2008 ; YANG et al., 1983) consistent à optimiser un ensemble de grandeurs déterminant complètement les propriétés radiatives du milieu homogène équivalent à partir de données expérimentales. Il peut s'agir, par exemple, de la réflectivité (directionnelle ou hémisphérique, spectrale ou totale) et de la transmittivité d'une colonne. Ces grandeurs sont globales et n'apportent pas d'information sur le comportement du milieu sur des distances de l'ordre de la taille du pore. Les données numériques sont, quant à elles, calculées en résolvant l'ETR associée au milieu semi-transparent équivalent par diverses méthodes (ordonnées discrètes (BAILLIS, ARDUINI-SCHUSTER et al., 2002 ; HENDRICKS et HOWELL, 1996 ; LORETZ et al., 2008), lancer de rayons ou Monte Carlo (ARGENTO et BOUVARD, 1996 ; COQUARD et BAILLIS, 2004 ; YANG et al., 1983)). Dans cette approche, l'incertitude sur les résultats expérimentaux, l'approximation beerienne, la précision des méthodes de résolution numérique et d'identification se cumulent et peuvent finalement compromettre la qualité des résultats finaux.

D'autres études ont été menées avec pour objectif la détermination *ab initio* des propriétés effectives des matériaux. Les propriétés radiatives de milieux supposés beeriens et composés d'assemblées de particules ont été étudiées. Les propriétés du milieu homogénéisé sont déterminées à partir des propriétés radiatives d'une particule seule. Lorsque la diffusion est indépendante, la détermination des propriétés effectives est relativement simple (KAVIANY, 1995) ;

¹Lorsque le milieu est anisotrope, les dépendances angulaires sont plus complexes.

1. INTRODUCTION

elle est en revanche plus complexe lorsque la diffusion est dépendante, et il est alors nécessaire de modéliser les interactions entre le rayonnement diffusé par des particules voisines.

Une nouvelle voie de caractérisation des milieux été ouverte par TANCREZ et TAINE (2004). Ces auteurs ont proposé une méthode générale de caractérisation à partir des fonctions de distribution radiatives, appelée *identification des fonctions de distribution radiatives* et évoquée de façon plus détaillée dans le chapitre 2. Elle repose sur la détermination des fonctions de distribution radiatives à partir de la géométrie du milieu et des propriétés radiatives des phases non-homogénéisées à l'échelle locale, puis la détermination des paramètres effectifs en identifiant les fonctions de distribution radiatives du milieu réel et de sa représentation homogénéisée. Cette méthode est générale et peut être appliquée à des phases de propagation transparentes ou semi-transparentes (BELLET et al., 2009 ; TANCREZ et TAINE, 2004 ; ZEGHONDY et al., 2006a).

Diverses études menées dans les années 2000 ont également porté sur la modélisation des transferts. Deux approches se sont différenciées : on distingue une approche statistique et une approche basée sur la prise de moyenne volumique. CONSALVI et al. (2002) posent les bases d'une modélisation des transferts radiatifs basée sur l'application de la méthode de prise de moyenne volumique (WHITAKER, 1999) à l'ETR. Cette approche est par la suite approfondie par LIPÍŃSKI, KEENE et al. (2010) ; LIPÍŃSKI, PETRASCH et al. (2010). GUSAROV (2008) propose une méthode également fondée sur la prise de moyenne volumique, appliquée cette fois au champ de luminance, et démontre la nécessité d'utiliser une équation de transfert propre à chaque phase mise en jeu. Dans tous les cas, l'équation de transfert obtenue est beerienne et une proposition d'une méthode de détermination des propriétés radiatives effectives est faite.

Une méthode plus générale d'homogénéisation statistique des transferts (TAINE, BELLET et al., 2010) fait l'objet d'un développement plus tardif et prolonge la logique de l'identification des fonctions de distribution. Elle consiste à construire une équation de transfert généralisée à partir des propriétés radiatives que sont les fonctions de distribution radiatives, de la même façon que l'on construit l'ETR. L'équation de transfert du rayonnement généralisée obtenue tient compte de l'éventuel caractère non-beerien du milieu.

1.1.2 Conduction et convection

La modélisation des phénomènes de transport (hors rayonnement) dans les milieux poreux a fait l'objet de nombreuses études. On citera l'œuvre de DARCY

1.1. Modélisation des transferts dans les milieux poreux

(1856), dans laquelle un premier modèle phénoménologique des écoulements à bas nombre de Reynolds était proposé et étayé par des résultats expérimentaux. Il aura cependant fallu attendre plus d'un siècle pour que les premières démonstrations théoriques de la loi de Darcy soient développées (IRMAY, 1958 ; MATHERON, 1965 ; WHITAKER, 1966 ; MARLE, 1967 ; SLATTERY, 1967). Les autres phénomènes de transport ont également fait l'objet d'études qui ont permis d'établir des équations macroscopiques de transport à partir des lois physiques valables à l'échelle du pore. Les méthodes de changement d'échelle permettent de démontrer les lois physiques et de prédire les propriétés effectives de transport. Entre ces méthodes, l'homogénéisation périodique et la prise de moyenne volumique sont parmi les plus populaires (KAVIANY, 1995).

La méthode d'homogénéisation périodique (AURIAULT, 1991 ; AURIAULT et ENE, 1994 ; MOYNE et al., 2000) est fondée sur l'analyse du comportement asymptotique de solutions périodiques pour les équations de conservation lorsque le rapport des échelles locale et macroscopique tend vers zéro. Cette méthode a été appliquée à une grande variété de configurations et de physiques. On peut citer, par exemple, l'établissement de la loi de Darcy (TARTAR, 1980) ou l'homogénéisation du bilan d'énergie dans des cas incluant la convection (ENE et POLISEVSKI, 1987 ; MOYNE et al., 2000).

La méthode de prise de moyenne volumique (WHITAKER, 1999) est fondée sur l'application d'un opérateur de prise de moyenne volumique aux bilans locaux. Ceci a pour effet de filtrer les variations spatiales des différentes grandeurs physiques mises en jeu : on élimine les fluctuations à l'échelle locale (hautes fréquences spatiales) pour ne conserver que celles à l'échelle macroscopique (basses fréquences spatiales). Elle permet l'établissement des équations macroscopiques de transport et la prédiction de propriétés effectives au moyen de problèmes de fermeture. Elle a été appliquée à diverses configurations et pour différentes physiques. On citera notamment l'établissement de la loi de Darcy (WHITAKER, 1986), des développements sur la correction de Forchheimer (WHITAKER, 1996), l'établissement de modèles macroscopiques de conduction (CARBONELL et WHITAKER, 1984 ; QUINTARD et WHITAKER, 1993a, 1995), le traitement de problèmes incluant les effets de la dispersion thermique (QUINTARD, KAVIANY et al., 1997) et de termes sources homogènes ou hétérogènes dans le bilan d'énergie (QUINTARD et WHITAKER, 2000). Dans ces travaux, les modèles résultants sont soumis à des contraintes (fluide incompressible, solide indéformable, propriétés thermo-physiques variables à grande échelle seulement, fermeture quasi-stationnaire, milieu macroscopiquement uniforme, etc.) qui doivent être relaxées dans certaines applications. Cela conduit au développe-

1. INTRODUCTION

ment de nombreux modèles adaptés aux spécificités de différents problèmes physiques.

Comme dans le cas du rayonnement, une méthode de changement d'échelle pour les transferts conductifs et convectifs fournit des équations de transferts macroscopiques et une méthode de caractérisation des milieux permettant de déterminer les propriétés effectives apparaissant des bilans macroscopiques.

1.2 Traitement des problèmes de transferts couplés

Bien que des études théoriques portant sur des problèmes de transferts thermiques couplés aient été menées (on peut citer à titre d'exemple les travaux de WHITAKER (1998), QUINTARD et WHITAKER (2000), DUVAL et al. (2004)), aucune n'a, jusqu'à présent, inclus les transferts radiatifs à l'échelle locale pour des raisons de compatibilité des modèles. Les études de problèmes dans lesquels le rayonnement n'est pas négligeable sont nombreuses (SATHE et al., 1990; YOSHIDA et al., 1990; MIN et SHIN, 1991; HSU et al., 1993; MOHAMMADIEN, 2000; BARRA, DIEPVEN et al., 2003; BARRA et ELLZEY, 2004; TALUKDAR et al., 2004; DOMBROVSKY et al., 2009; HISCHE et al., 2009), mais elles n'abordent pas la question des effets de la micro-structure du milieu poreux sur le couplage rayonnement-conduction-convection. Le terme radiatif est donc toujours inclus dans le bilan d'énergie macroscopique de l'une des phases du milieu. Cette méthode de couplage sera qualifiée par la suite de *macroscopique*.

1.3 Définition du problème

Les procédures de changement d'échelle sont actuellement effectuées séparément pour la conduction et la convection d'un côté, et le rayonnement de l'autre. Cela conduit à des modèles macroscopiques de transfert distincts devant ensuite être associés pour produire un modèle macroscopique de transferts couplés (figure 1.1). Cette méthode, utilisée dans les références mentionnées à la section 1.2, présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les effets éventuels du couplage entre le rayonnement et les autres modes de transfert à l'échelle locale et leur impact sur le modèle macroscopique. Notons, pour soutenir ce propos, qu'il a été montré que les effets à l'échelle locale du couplage conduction-convection sont à l'origine de l'effet macroscopique de dispersion. Tout comme on ne peut pas prédire les effets de la dispersion en incluant simplement les termes de convection et de diffusion dans un bilan macroscopique,

1.3. Définition du problème

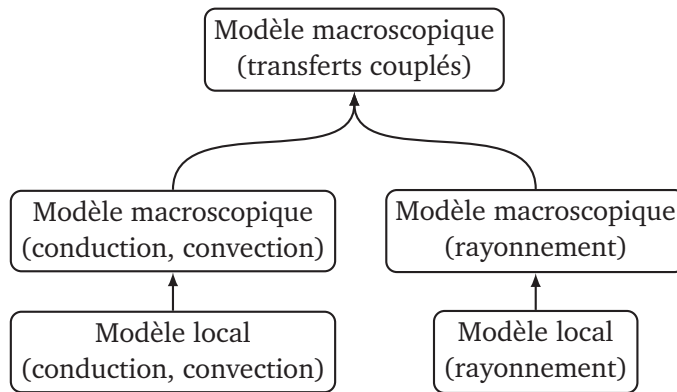


FIGURE 1.1: Principe du couplage macroscopique.

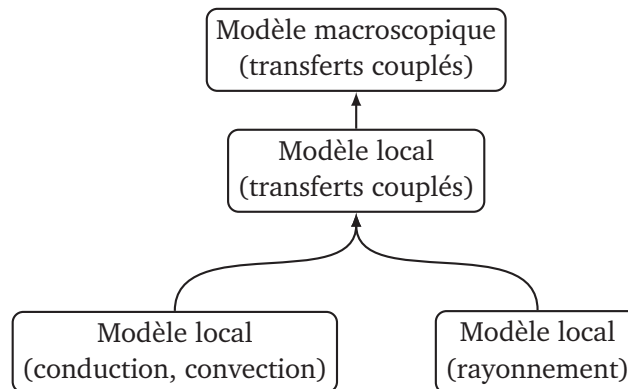


FIGURE 1.2: Principe d'une hypothétique méthode de changement d'échelle unifiée.

il est possible qu'on omette des effets en effectuant un couplage macroscopique du rayonnement avec les autres modes de transfert. Une méthode de changement d'échelle unifiée, prenant en compte tous les modes de transfert simultanément (figure 1.2), permettrait l'écriture d'un modèle macroscopique de transferts couplés prédisant les effets macroscopiques du couplage ; une telle méthode n'a pas encore été développée.

Une solution alternative à une méthode de changement d'échelle unifiée

1. INTRODUCTION

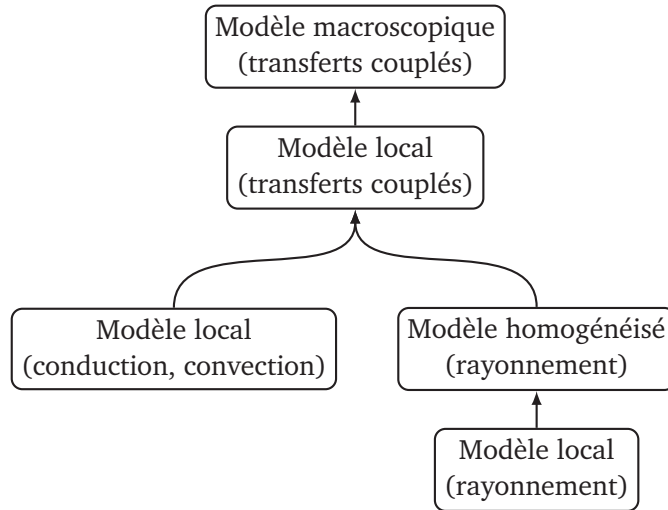


FIGURE 1.3: Principe d'une méthode à changements d'échelle successifs.

consiste à appliquer les méthodes de changement d'échelle successivement. On construit d'abord un modèle intermédiaire dans lequel une partie seulement des transferts est homogénéisée. Une procédure de changement d'échelle est ensuite appliquée à ce modèle intermédiaire pour obtenir un modèle macroscopique (figure 1.3). Cette solution permet l'utilisation de méthodes de changement d'échelle déjà existantes dont le choix est soumis à des conditions de compatibilité entre modèles : l'une des procédures de changement d'échelle doit aboutir à un modèle homogénéisé de transfert valable à l'échelle locale pour l'autre méthode. D'autres questions liées à l'interaction entre les différents modes de transfert dans le modèle intermédiaire se posent également : comment les transferts radiatifs homogénéisés sont-ils inclus dans le modèle local pour les transferts non encore homogénéisés ? Comment déterminer un champ de température utilisable dans un modèle de transferts radiatifs homogénéisés à partir du champ de température non-homogénéisé de la matière ? Ces questions, et d'autres, doivent être résolues pour parvenir ensuite à un modèle macroscopique rigoureux.

1.4 Objectifs et structure de la thèse

Cette thèse propose de répondre à la question de l'établissement d'un modèle macroscopique de transferts couplés à partir de la physique à l'échelle locale au moyen d'une procédure de changement d'échelle fondée sur la prise de moyenne volumique. On se propose ensuite d'appliquer ce modèle afin de traiter un cas simple. Ce mémoire est structuré comme suit :

Le chapitre 2 est dédié à la présentation détaillée de la méthode d'homogénéisation statistique du rayonnement utilisée dans ce travail. Cette méthode produit un modèle de transferts pour des phases homogénéisées, valable à l'échelle du pore. Ce chapitre est une synthèse des divers travaux publiés sur le sujet.

Le chapitre 3 présente un modèle de changement d'échelle incluant les couplages entre le rayonnement et les deux autres modes de transfert. Il précise l'ensemble des questions posées par l'application successive de deux méthodes de changement d'échelle et propose des réponses. Il s'appuie sur un article reproduit dans ce mémoire.

Le chapitre 4 présente l'application de cette méthode à un cas unidimensionnel et stationnaire. Il inclut la proposition d'un modèle adapté au cas traité, la caractérisation d'un milieu poreux ainsi que la résolution des équations macroscopiques de transfert.





Chapitre 2

Homogénéisation statistique du rayonnement dans les milieux poreux

DE NOMBREUSES méthodes existent pour homogénéiser les transferts radiatifs. Parmi ces méthodes, l'homogénéisation statistique, évoquée brièvement en introduction, présente des caractéristiques intéressantes vis-à-vis de la problématique du couplage, la plus importante étant la validité du modèle homogénéisé à des échelles de longueurs petites devant la taille caractéristique du pore. On mentionnera également l'applicabilité de la méthode à des milieux complexes et sa capacité à traiter avec précision toutes les épaisseurs optiques. Afin de mettre en exergue l'origine de chacune de ces caractéristiques, ce chapitre propose une présentation succincte de la méthode d'homogénéisation statistique du rayonnement, ainsi que quelques résultats montrant son intérêt pour la caractérisation des milieux.

Cette approche repose sur le fait qu'un milieu semi-transparent homogénéisé associé à une phase non-opaque peut être entièrement caractérisé au moyen des fonctions de distribution des cordes (TORQUATO et LU, 1993 ; LEVITZ, 1998). Les travaux entrepris par TANCREZ et TAINE (2004) ont porté sur l'application à des milieux virtuels constitués de phases opaque et transparente. L'approche a été étendue à des milieux réels composés de phases semi-transparentes (ZEGHONDY et al., 2006a), puis développée et appliquée notamment par PETRASCH, WYSS et al. (2007), BELLET et al. (2009), HAUSSENER,



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

LIPÍŃSKI, PETRASCH et al. (2009) et HAUSSENER, CORAY et al. (2010). Un modèle de transfert fondé sur cette approche a été présenté par TAINE, BELLET et al. (2010) et approfondi par GOMART et TAINE (2011). Une revue détaillée de cette méthode d'homogénéisation a été donnée par TAINE et IACONA (2012) pour des milieux statistiquement isotropes.

La section 2.1 discute la caractérisation des milieux. L'équation de transfert radiatif généralisée, ou GRTE¹ (TAINE, BELLET et al., 2010), exprimée en fonction des fonctions de distribution radiatives, est présentée dans la section 2.2. La section 2.3 traite du cas des milieux optiquement épais, dans lequel on observe une dégénérescence de la GRTE en une ETR classique. La section 2.4 présente l'exemple de la caractérisation d'un milieu statistiquement uniforme et isotrope. Enfin, la section 2.5 conclut ce chapitre en soulignant certaines particularités du modèle.

2.1 Caractérisation des milieux

Cette section aborde la question de la caractérisation radiative des milieux poreux constitués de deux phases. Les cas d'une phase opaque et d'une phase transparente (O/T), d'une phase semi-transparente et d'une phase transparente (ST/T) et de deux phases semi-transparentes (ST/ST) y sont abordés ; le cas plus délicat d'une phase opaque et d'une phase semi-transparente est traité par CHAHLAFI et al. (2012). Les hypothèses suivantes seront faites :

1. Le milieu est supposé statistiquement homogène et isotrope. L'approche peut être généralisée pour des milieux anisotropes (ZEGHONDY et al., 2006a ; BELLET et al., 2009 ; TAINE, BELLET et al., 2010 ; CHAHLAFI et al., 2012).
2. La géométrie des phases est connue avec une résolution l_t (par exemple à partir de données issues d'une tomographie).
3. Les propriétés radiatives de chaque phase non-homogénéisée sont connues à une échelle de longueur petite devant l_t .
4. Les longueurs d'onde radiatives mises en jeu sont petites devant la taille caractéristique du pore. Par conséquent, la diffraction est négligeable et les lois de l'optique géométrique s'appliquent.

¹Generalized radiation transfer equation.

2.1. Caractérisation des milieux

Le cas O/T a la particularité de représenter au moyen d'une phase semi-transparente, qui sera notée par l'indice w , des transferts se produisant en réalité entre des parois opaques. La phase de propagation du champ de rayonnement est donc, en réalité, transparente. Les phénomènes d'absorption et de réflexion aux parois sont respectivement représentés par de l'absorption et de la diffusion en volume. Un point du milieu continu homogénéisé n'est pas un point courant appartenant à une interface (les interfaces n'existent pas dans le milieu homogénéisé) : ce milieu homogénéisé est caractérisé, en un point M donné du milieu réel, par une probabilité de présence Π_w égale à la porosité Π_f du milieu.

Dans le cas ST/ST, le milieu homogénéisé possède deux phases f et s semi-transparentes absorbantes, émissives et diffusantes, qui sont également couplées par les phénomènes d'interface. Ces deux phases ont, en un point donné, une probabilité de présence égale à leurs fractions volumiques respectives Π_f et Π_s .

Dans le cas ST/T, le milieu homogénéisé possède également deux phases couplées, mais une seule des deux est absorbante et émissive, l'autre étant uniquement diffusante. On désignera dans la suite par s et f les phases non-homogénéisées respectivement semi-transparente et transparente, ainsi que les phases homogénéisées qui leur sont associées.

2.1.1 Fonctions de distribution radiatives

Les fonctions de distribution radiatives caractérisent le milieu homogénéisé de façon exhaustive. Ces propriétés sont à distinguer de celles qui caractérisent les phases qui constituent le milieu non-homogénéisé, qui sont les propriétés homogènes des matériaux qui les composent. Comme les hypothèses d'isotropie et d'uniformité statistiques du milieu poreux ont été adoptées, ces fonctions sont indépendantes de la direction et de la position. Dans la suite, l'indice γ représente une phase homogénéisée quelconque.

Fonction de distribution cumulée d'extinction. La fonction de distribution cumulée d'extinction $G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(s' - s)$ est la probabilité qu'un rayon tiré dans une direction quelconque en un point M d'abscisse s du milieu homogénéisé soit

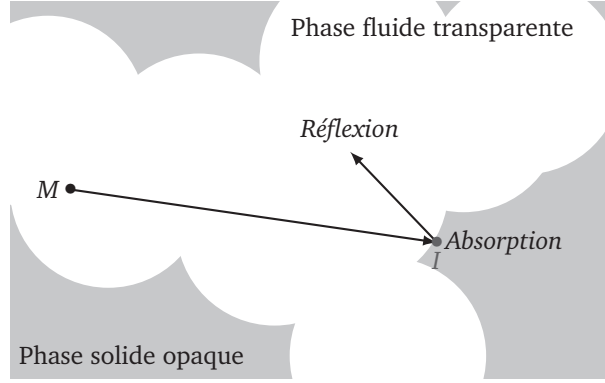


FIGURE 2.1: Cas d'extinction dans la configuration O/T (M : point source ; I : point d'extinction).

éteint (c.-à-d. absorbé ou diffusé) dans l'intervalle² $[s, s']$. $G_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}$ peut être exprimée en fonction de la fonction de distribution d'extinction $f_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}$:

$$G_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}(s' - s) = \int_s^{s'} f_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}(u) du. \quad (2.1)$$

Du point de vue des transferts, il s'agit du complément à 1 de la transmittivité $\tau_{\gamma, \nu}(s' - s)$ du milieu sur une épaisseur $(s' - s)$. $G_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}$ varie entre 0 et 1, un rayon finissant toujours par être éteint au bout d'une distance suffisamment grande.

Dans la configuration O/T, un rayon se propageant dans la phase transparente est physiquement éteint (dans le point de vue non-homogénéisé) lorsqu'il rencontre une paroi, où il est absorbé ou réfléchi. Si M est le point source d'un rayon et I le point d'impact à la paroi associé (voir figure 2.1), la fonction de distribution cumulée d'extinction est la distribution cumulée des longueurs des segments $[MI]$ dans le milieu. Par conséquent, G_w^{ext} n'a pas de dépendance en fréquence et ne dépend que de la géométrie du milieu considéré.

²La dépendance en $(s' - s)$ est due à l'hypothèse d'uniformité statistique du milieu poreux. Dans le cas général d'un milieu statistiquement isotrope, on notera la fonction de distribution cumulée d'extinction $G_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}(s, s')$. Si l'hypothèse d'isotropie statistique est également levée, une dépendance additionnelle en angle vient s'ajouter et on note la fonction $G_{\gamma, \nu}^{\text{ext}}(s, s', \mathbf{u})$.

2.1. Caractérisation des milieux

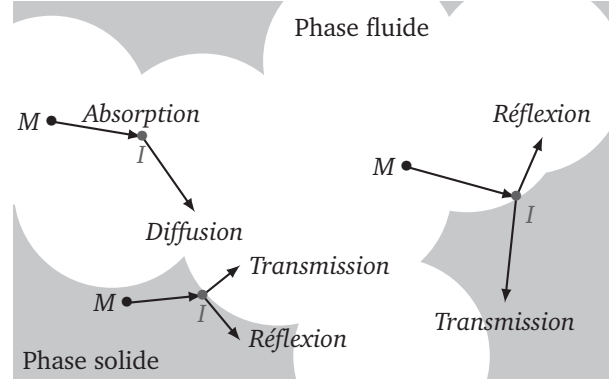


FIGURE 2.2: Cas d'extinction dans la configuration ST/ST (M : point source ; I : point d'extinction).

Dans le cas d'une phase non-homogénéisée semi-transparente (cas ST/ST et ST/T), l'extinction peut se produire au sein de la phase, par absorption ou par diffusion en volume, ou bien lorsque le rayon atteint une paroi, par transmission ou réflexion (voir figure 2.2). $G_{\gamma,\nu}^{\text{ext}}$ dépend donc des propriétés radiatives des phases non-homogénéisées, et par conséquent de la fréquence ν *a priori*.

Probabilités cumulées d'absorption et de diffusion. Ces deux fonctions sont respectivement notées $P_{\gamma,\nu}^a(s' - s)$ et $P_{\gamma,\nu}^{\text{sc}}(s' - s)$ et représentent la probabilité qu'un rayon tiré en un point d'abscisse s du milieu homogénéisé (dans une direction quelconque) a d'être absorbé ou diffusé dans l'intervalle $[s, s']$. On a par définition

$$G_{\gamma,\nu}^{\text{ext}}(s' - s) = P_{\gamma,\nu}^a(s' - s) + P_{\gamma,\nu}^{\text{sc}}(s' - s). \quad (2.2)$$

Dans le cas O/T, les phénomènes homogénéisés d'absorption et de diffusion correspondent physiquement à l'absorption et à la réflexion aux parois de la phase opaque.

Dans les cas ST/ST et ST/T, l'absorption homogénéisée correspond à l'absorption en volume dans une phase non-homogénéisée semi-transparente ; la diffusion homogénéisée correspond, quant à elle, soit à la diffusion en volume dans une telle phase, soit à la réflexion et la transmission aux interfaces entre les deux phases non-homogénéisées.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

$P_{\gamma,v}^a$ et $P_{\gamma,v}^{sc}$ dépendent donc dans tous les cas des propriétés radiatives des phases non-homogénéisées, et par conséquent *a priori* de la fréquence.

Fonction de phase de diffusion. La fonction de phase de diffusion représente la distribution des directions de diffusion \mathbf{u}' d'un rayon diffusé, de direction initiale \mathbf{u} .

Dans le cas O/T, elle est notée $p_{w,v}(\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}')$ et est déterminée à partir des lois de réflexion aux parois des matériaux composant les phases non-homogénéisées.

Dans les cas ST/ST et ST/T, elle est déterminée à partir des fonctions de phase des phases semi-transparentes non-homogénéisées et des lois de réflexion et de transmission aux interfaces. Dans ces cas, des fonctions de phase de diffusion partielles sont associées aux différents phénomènes physiques. Pour une phase $\gamma_1 = f$ ou s , on définit :

- $p_{\gamma_1,v}^r(\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}')$, associée à la réflexion aux interfaces avec une autre phase, semi-transparente ou transparente ;
- $p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2,v}^t(\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}')$, associée à la transmission à travers les interfaces avec une autre phase γ_2 ;
- $p_{\gamma_1,v}^{sc}(\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}')$, associée à la diffusion en volume au sein de la phase γ_1 .

À chacune de ces fonctions de phase de diffusion partielles est associée une probabilité cumulée de diffusion partielle. Ces dernières sont respectivement notées $p_{\gamma_1,v}^{sc,r}(s' - s)$, $p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2,v}^{sc,t}(s' - s)$ et $p_{\gamma_1,v}^{sc,sc}(s' - s)$. On sépare alors les contributions liées au couplage entre les phases en écrivant

$$p_{\gamma_1,v}^{sc}(s' - s) = p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1,v}^{sc}(s' - s) + p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2,v}^{sc}(s' - s) \quad (2.3)$$

$$\text{avec} \quad p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1,v}^{sc}(s' - s) = p_{\gamma_1,v}^{sc,r}(s' - s) + p_{\gamma_1,v}^{sc,sc}(s' - s) \quad (2.4)$$

$$\text{et} \quad p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2,v}^{sc}(s' - s) = p_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2,v}^{sc,t}(s' - s). \quad (2.5)$$

2.1.2 Détermination des propriétés radiatives

La détermination pratique des propriétés radiatives effectives est faite au moyen d'une méthode de Monte Carlo qui simule la propagation d'un grand nombre de rayons (typiquement, entre 10^6 et 10^8) dans la phase transparente. Cette méthode nécessite une connaissance détaillée de la géométrie du milieu, soit au moyen d'une description analytique, soit au moyen de données tomographiques.



2.1. Caractérisation des milieux

L'application à des milieux DOTS³ est présentée en détails dans la section 2.4. Il est à noter que cette méthode de Monte Carlo ne simule pas les transferts.

Dans le cas O/T, le point de départ d'un rayon dans la phase transparente et sa direction sont déterminés aléatoirement. Le point d'impact du rayon est ensuite déterminé au moyen des données géométriques du milieu non-homogénéisé ; les interfaces entre les phases opaque et transparente peuvent être définies analytiquement, comme dans le cas des milieux DOTS (TANCREZ et TAINE, 2004) ou des grappes de cylindres (BELLET et al., 2009), ou au moyen d'algorithmes de reconstruction de surfaces tels que l'algorithme du cube mobile (LORENSEN et CLINE, 1987) dans le cas de milieux réels (ZEGHONDY et al., 2006a ; CHAHLAFI et al., 2012). La détermination du point d'impact donne la longueur du rayon ; G_w^{ext} est alors construite rayon par rayon. La connaissance de l'angle d'impact et des lois de réflexion à l'interface permet la construction de $P_{w,v}^a$ et de $p_{w,v}$.

Les cas ST/ST et ST/T nécessitent la prise en compte des phénomènes de volume contribuant à l'extinction en plus de l'impact à la paroi. La démarche n'est pas décrite en détails dans ce paragraphe par souci de concision, ces cas n'étant pas abordés dans les applications numériques liées à ces travaux.

2.1.3 Cas d'un milieu beerien

Fonction de distribution cumulée d'extinction. Dans le cas d'une phase homogénéisée γ beerienne, la densité de probabilité d'extinction dans un intervalle $[s, s + ds]$ d'un rayon tiré en s est uniforme et égale au coefficient d'extinction $\beta_{\gamma,v}$. La transmittivité d'une colonne homogène et isotherme d'épaisseur s est alors donnée par

$$\tau_{\gamma,v}(s) = e^{-\beta_{\gamma,v}s}. \quad (2.6)$$

La probabilité qu'un rayon tiré en 0 soit éteint entre s et $s + ds$ est donc le produit de deux termes :

- la probabilité que le rayon soit transmis entre 0 et s , égale à $\tau_{\gamma,v}(s)$;
- la probabilité que le rayon soit éteint dans l'intervalle $[s, s + ds]$, égale à $\beta_{\gamma,v}ds$.

La fonction de distribution d'extinction d'un rayon tiré en 0 est donc donnée par

$$f_{\gamma,v}^{\text{ext,Beer}}(s) = \beta_{\gamma,v}e^{-\beta_{\gamma,v}s}. \quad (2.7)$$

³Dispersed radii overlapping transparent spheres.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

La fonction de distribution cumulée d'extinction est obtenue en intégrant $f_{\gamma,v}^{\text{ext,Beer}}$ entre 0 et s , ce qui donne

$$\begin{aligned} G_{\gamma,v}^{\text{ext,Beer}}(s) &= \int_0^s f_{\gamma,v}^{\text{ext,Beer}}(u) du \\ &= 1 - e^{-\beta_{\gamma,v}s}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Probabilités cumulées d'absorption et de diffusion. On démontre de façon similaire que les probabilités cumulées d'absorption et de diffusion dans un milieu beerien sont données par

$$P_{\gamma,v}^{\text{a,Beer}}(s) = \frac{\kappa_{\gamma,v}}{\beta_{\gamma,v}} (1 - e^{-\beta_{\gamma,v}s}), \quad (2.9)$$

$$P_{\gamma,v}^{\text{sc,Beer}}(s) = \frac{\sigma_{\gamma,v}}{\beta_{\gamma,v}} (1 - e^{-\beta_{\gamma,v}s}), \quad (2.10)$$

où $\kappa_{\gamma,v}$ et $\sigma_{\gamma,v}$ sont respectivement les coefficients d'absorption et de diffusion du milieu. Les coefficients d'extinction, d'absorption et de diffusion vérifient la relation

$$\beta_{\gamma,v} = \kappa_{\gamma,v} + \sigma_{\gamma,v}. \quad (2.11)$$

Ces coefficients et la fonction de phase de diffusion caractérisent complètement un milieu beerien.

2.1.4 Identification des fonctions de distribution radiatives (RDFI)

La méthode RDFI⁴ (TANCREZ et TAINE, 2004 ; ZEGHONDY et al., 2006a) permet de quantifier la validité de l'approximation beerienne pour décrire le comportement radiatif d'un milieu poreux. Les fonctions de distribution radiatives, déterminées au moyen de la méthode présentée dans la sous-section 2.1.2, sont comparées aux fonctions de distribution beeriennes (exponentielles) qui approchent le mieux le comportement radiatif du milieu considéré. On utilise pour cela le critère de validité de la loi de Beer (TANCREZ et TAINE, 2004)

$$\varepsilon_{\beta_{\gamma,v}} = \left(\frac{\int_0^\infty \left[G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(u) - (1 - e^{-\beta_{\gamma,v}u}) \right]^2 du}{\int_0^\infty \left[1 - G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(u) \right]^2 du} \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

⁴Radiative distribution functions identification.



2.2. Modélisation des transferts radiatifs : GRTE

La valeur de $\beta_{\gamma,v}$ qui minimise la fonctionnelle $\varepsilon_{\beta_{\gamma,v}}$ est le coefficient d'extinction du milieu beerien effectif représentant le milieu poreux. $\varepsilon_{\beta_{\gamma,v}}$ donne l'écart-type relatif entre la fonction de distribution cumulée d'extinction et son expression beerienne. On considérera en pratique que l'approximation beerienne est valable si $\varepsilon_{\beta_{\gamma,v}}$ est inférieur à quelques pour-cent (typiquement 4×10^{-2}).

Il existe des critères similaires pour déterminer les coefficients d'absorption $\kappa_{\gamma,v}$ et de diffusion $\sigma_{\gamma,v}$ (TANCREZ et TAINE, 2004).

2.1.5 Cas limite d'un milieu optiquement mince ou épais

Le coefficient d'extinction à la limite d'un milieu optiquement mince dans le cas O/T, noté β^{ot} (l'exposant « ot » signifiant *optically thin*), s'exprime en fonction de la porosité Π_f et de l'aire interfaciale par unité de volume du milieu poreux A par⁵ (TANCREZ et TAINE, 2004)

$$\beta^{\text{ot}} = \frac{A}{4 \Pi_f}. \quad (2.13)$$

β^{ot} , utilisé comme référence, est défini pour tous les milieux, beeriens ou non, et correspond à la pente de $G_w^{\text{ext}}(s)$ en $s = 0$. L'expression (2.13) n'est valable que pour un milieu statistiquement isotrope ; dans le cas de milieux statistiquement anisotropes, l'expression de β^{ot} peut être différente.

Un coefficient d'extinction généralisé à l'équilibre $B_{\gamma,v}$ peut également être défini pour tout milieu semi-transparent à la limite où il est optiquement épais (voir sous-section 2.2.2), qu'il soit beerien ou non (TAINE, BELLET et al., 2010). D'autres propriétés radiatives généralisées sont également définies à la limite d'un milieu optiquement épais (voir sous-section 2.2.2 également).

2.2 Modélisation des transferts radiatifs : l'équation de transfert radiatif généralisée

L'équation de transfert radiatif classique ne permet pas de décrire les transferts dans les milieux non-beeriens car elle repose sur la proportionnalité de l'extinction à la luminance incidente caractérisant une extinction beerienne

⁵La relation (2.13) comporte ici un facteur Π_f absent dans l'article de TANCREZ et TAINE (2004), où l'aire interfaciale est rapportée au volume de la phase fluide, et non à celui de tout le milieu poreux.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

(exponentielle). Il est cependant possible, en utilisant une interprétation statistique des phénomènes d'émission, absorption et diffusion, de construire une équation de transfert radiatif généralisée (TAINE, BELLET et al., 2010) à partir des propriétés radiatives présentées dans la section 2.1.

L'équation de transfert radiatif généralisée (GRTE) donne les variations de la luminance dans une phase homogénéisée. Il est important de noter qu'une phase homogénéisée γ ne possède pas de délimitations spatiales au sein d'un élément de volume dV du milieu poreux ; elle y possède, dans cette approche statistique, une probabilité de présence égale à la fraction volumique Π_γ de la phase non-homogénéisée γ associée. La luminance $I_{\gamma,v}(s, \mathbf{u})$ associée est par conséquent continûment définie dans l'espace. Il sera fait le choix, dans la suite, de rapporter $I_{\gamma,v}$ au volume de l'ensemble du milieu poreux. $I_{\gamma,v}$ sera donc implicitement proportionnelle à Π_γ .

2.2.1 Expression générale de la luminance

L'expression de la GRTE repose sur l'établissement d'une expression générale de la luminance. La luminance en un point $M(s)$ et dans une direction \mathbf{u} est la somme de deux contributions. La première est la somme, entre l'abscisse s_b de la frontière du milieu poreux dans la direction \mathbf{u} et l'abscisse s , des termes sources radiatifs volumiques $S_{\gamma,v}(s', \mathbf{u})$ transmis jusqu'en s . L'expression de cette contribution est donc

$$\int_{s_b}^s S_{\gamma,v}(s', \mathbf{u}) \left(1 - G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(s - s')\right) ds'.$$

La seconde contribution est celle de la luminance issue de la frontière d'abscisse s_b dans la direction \mathbf{u} , notée $I_{\gamma,v}^1(s_b, \mathbf{u})$, et transmise jusqu'en s . Elle vaut

$$I_{\gamma,v}^1(s_b, \mathbf{u}) \left(1 - G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(s - s_b)\right).$$

La luminance en un point $M(s)$ et dans une direction \mathbf{u} donnés a donc l'expression

$$\begin{aligned} I_{\gamma,v}(s, \mathbf{u}) = & \int_{s_b}^s S_{\gamma,v}(s', \mathbf{u}) \left(1 - G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(s - s')\right) ds' \\ & + I_{\gamma,v}^1(s_b, \mathbf{u}) \left(1 - G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(s - s_b)\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$



2.2. Modélisation des transferts radiatifs : GRTE

$S_{\gamma,v}(s', \mathbf{u})$ comprend une contribution liée à l'émission et une contribution liée à la diffusion :

$$S_{\gamma,v}(s', \mathbf{u}) = S_{\gamma,v}^e(s', \mathbf{u}) + S_{\gamma,v}^{sc}(s', \mathbf{u}). \quad (2.15)$$

Une expression générale pour $S_{\gamma,v}^e$ est donnée dans la sous-section 2.2.2. $S_{\gamma,v}^{sc}$ prend des expressions différentes selon la configuration radiative considérée (O/T, ST/ST, ST/T, etc. ; voir sous-section 2.2.3).

2.2.2 Équilibre thermodynamique local, émission

Dans les conditions d'équilibre thermodynamique à la température Θ_γ , les termes sources d'émission et de diffusion ainsi que le champ de luminance associé à une phase homogénéisée sont uniformes. Dans ces conditions, le terme source d'émission $S_{\gamma,v}^e$, qui correspond à la puissance rayonnée par unités de volume, d'angle solide et de fréquence, est donné par (TAINE, BELLET et al., 2010)

$$S_{\gamma,v}^e = \Pi_\gamma K_{\gamma,v} n_{\gamma,v}^2 I_v^\circ(\Theta_\gamma). \quad (2.16)$$

$K_{\gamma,v}$ est le coefficient d'absorption généralisé à l'équilibre, I_v° est la luminance d'équilibre et $n_{\gamma,v}$ est l'indice optique de la phase non-homogénéisée⁶ γ .

Deux autres propriétés radiatives généralisées à l'équilibre peuvent être introduites (TAINE, BELLET et al., 2010) : le coefficient d'extinction généralisé à l'équilibre $B_{\gamma,v}$ et le coefficient de diffusion généralisé à l'équilibre $\Sigma_{\gamma,v}$. Ces quantités s'expriment en fonction des valeurs asymptotiques des fonctions de distribution radiatives :

$$B_{\gamma,v} = \left(\int_0^\infty (1 - G_{\gamma,v}^{\text{ext}}(u)) du \right)^{-1}, \quad (2.17)$$

$$K_{\gamma,v} = B_{\gamma,v} P_{\gamma,v}^a(\infty), \quad (2.18)$$

$$\Sigma_{\gamma,v} = B_{\gamma,v} P_{\gamma,v}^{sc}(\infty). \quad (2.19)$$

Dans le cas où plusieurs phases semi-transparentes non-homogénéisées sont mises en jeu, on définit également des coefficients de diffusion partiels généralisés pour une phase γ_1 par

$$\Sigma_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1, v} = B_{\gamma_1, v} P_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1, v}^{sc}(\infty) \quad (2.20)$$

⁶Ceci n'est vrai que dans le cas d'un milieu isotrope. Si le milieu est anisotrope, l'indice optique effectif peut être différent de celui de la phase non-homogénéisée.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

où γ_1 et γ_2 désignent f ou s . Les configurations O/T et ST/T présentent les particularités suivantes :

- dans la configuration O/T, l'indice effectif $n_{w,v}$ est égal à l'indice optique du milieu transparent non-homogénéisé (1 pour un gaz) ;
- dans la configuration ST/T, l'indice effectif $n_{f,v}$ de la phase fluide transparente est égal à celui du milieu transparent non-homogénéisé ; le coefficient d'absorption effectif $K_{f,v}$ est nul.

Dans la suite, le milieu sera considéré à l'équilibre thermodynamique local (ETL) au sens de la théorie du transport de Boltzmann : un point M du milieu homogénéisé est caractérisé par une température $\Theta_\gamma(M)$ et le terme source d'émission est donné par l'équation (2.16).

La définition de la température Θ_γ est un point critique du couplage avec les transferts ayant lieu dans la matière. Cette question est discutée en détails dans la section 3.3.

2.2.3 Diffusion

Configuration O/T. Dans le cas O/T, le terme source de diffusion est donné par (TAINE, BELLET et al., 2010)

$$S_{w,v}^{\text{sc}}(s, \mathbf{u}) = \int_{4\pi} \left[\int_{s_{1b}}^{s_1} \left(\frac{dP_{w,v}^{\text{sc}}(u)}{du} (s_1 - s'_1) \right) S_{w,v}(s'_1, \mathbf{u}_1) ds'_1 + \left(\frac{dP_{w,v}^{\text{sc}}(u)}{du} (s_1 - s_{1b}) \right) I_{w,v}^l(s_{1b}, \mathbf{u}_1) \right] \times \frac{p_{w,v}(\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u})}{4\pi} d\Omega_1. \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) est prise en un point M d'abscisse s et pour une direction de diffusion \mathbf{u} . M a pour abscisse s_1 dans la direction \mathbf{u}_1 d'où provient le rayonnement diffusé. Une représentation des deux systèmes de coordonnées est donnée dans la figure 2.3.

Le terme source $S_{w,v}^{\text{sc}}$ est obtenu en faisant deux intégrations : la première sur les directions \mathbf{u}_1 d'où proviennent le rayonnement diffusé, et la deuxième sur toutes les abscisses s'_1 dans la direction \mathbf{u}_1 . $S_{w,v}^{\text{sc}}$ dépend de tous les termes sources (d'émission et de rayonnement), en tout point de l'espace, dans toutes les directions.



2.2. Modélisation des transferts radiatifs : GRTE

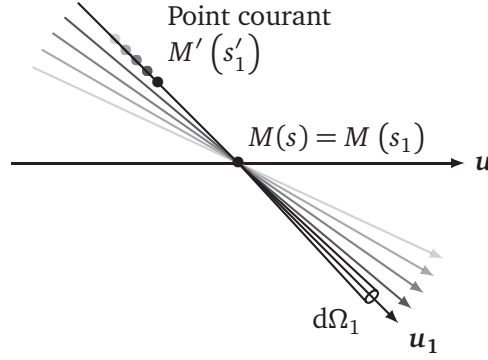


FIGURE 2.3: Systèmes de coordonnées pour le terme source de diffusion.

Configuration ST/ST. Le terme source de diffusion dans chaque phase est couplé avec les termes sources de l'autre phase, et il est donné par (TAINÉ et IACONA, 2012)

$$\begin{aligned}
 S_{\gamma_1, \nu}^{\text{sc}}(s, \mathbf{u}) &= \int_{4\pi} \left[\int_{s_{1b}}^{s_1} \left[D_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1, \nu}(s_1 - s'_1, \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}) S_{\gamma_1, \nu}(s_1, \mathbf{u}_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + D_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1, \nu}(s_1 - s'_1, \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}) S_{\gamma_2, \nu}(s_1, \mathbf{u}_1) \right] ds'_1 \right. \\
 &\quad \left. + D_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1, \nu}(s_1 - s_{1b}, \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}) I_{\gamma_1, \nu}^l(s_{1b}, \mathbf{u}_1) \right. \\
 &\quad \left. + D_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1, \nu}(s_1 - s_{1b}, \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}) I_{\gamma_2, \nu}^l(s_{1b}, \mathbf{u}_1) \right] d\Omega_1.
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans l'équation (2.22), γ_1 et γ_2 désignent les deux phases. On a par ailleurs

$$D_{\gamma_i \rightarrow \gamma_1, \nu}(\Delta s, \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}) = \left[\frac{dP_{\gamma_i \rightarrow \gamma_1}^{\text{sc}}(\Delta s')}{d\Delta s'}(\Delta s) \right] \frac{p_{\gamma_i \rightarrow \gamma_1, \nu}(\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u})}{4\pi} \quad (2.23)$$

avec $i = 1$ ou 2 .

Configuration ST/T. L'expression du terme source de diffusion est identique à celle du cas ST/ST (équation (2.22)).



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

2.2.4 Expression générale de l'ETR généralisée

TAINE, BELLET et al. (2010) expose de façon détaillée la démarche permettant de construire l'ETR généralisée à partir de l'expression de la luminance (2.14). Elle donne la variation de la luminance en fonction de la position et de la direction (TAINE et IACONA, 2012) :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\gamma,\nu}}{ds}(s, \mathbf{u}) = & S_{\gamma,\nu}(s, \mathbf{u}) - \int_{s_b}^s S_{\gamma,\nu}(s', \mathbf{u}) \frac{dG_{\gamma,\nu}^{\text{ext}}}{ds'}(s - s') ds' \\ & - I_{\gamma,\nu}^l(s_b, \mathbf{u}) \frac{dG_{\gamma,\nu}^{\text{ext}}}{ds'}(s - s_b) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les deux derniers termes sont les termes d'extinction. Ils correspondent à une extinction exponentielle lorsque le milieu est beerien, mais pas dans le cas général.

2.2.5 Puissance radiative

Le champ de rayonnement homogénéisé interagit avec la matière au travers d'un terme de puissance radiative par unité de volume, qui s'exprime à partir du vecteur flux radiatif \mathbf{q}_γ^R par

$$\mathcal{P}_\gamma^R = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\gamma^R. \quad (2.25)$$

\mathbf{q}_γ^R s'exprime en fonction du champ de luminance et a pour expression

$$\mathbf{q}_\gamma^R = \int_0^\infty \left(\int_0^{4\pi} \mathbf{u} I_{\gamma,\nu}(r, \mathbf{u}) d\Omega \right) dv. \quad (2.26)$$

Le champ \mathcal{P}_γ^R est rapporté à l'ensemble du volume du milieu poreux. Il faut donc le diviser par la fraction volumique Π_γ pour obtenir le terme de puissance volumique intrinsèque dans la phase γ .

Cas O/T : flux surfacique isotrope équivalent. Dans le cas O/T, les transferts ayant lieu entre surfaces, utiliser une puissance volumique intrinsèque n'a guère de sens physique car il n'existe pas de puissance volumique dans un milieu transparent. Il est physiquement plus cohérent de transformer le terme de puissance volumique en un flux surfacique interfacial équivalent donné par (TAINE, BELLET et al., 2010)

$$A\varphi_w^R = \mathcal{P}_w^R, \quad (2.27)$$





2.3. Limite d'un milieu optiquement épais

où A est l'aire interfaciale par unité de volume du milieu poreux.

2.3 Limite d'un milieu optiquement épais

2.3.1 Équation de transfert du rayonnement

À la limite d'un milieu optiquement épais, l'ETR généralisée dégénère en une ETR classique (TAINE et IACONA, 2012). Dans la configuration O/T, elle prend la forme (pour $n_{f,v} = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{dI_{w,v}}{ds}(s, \mathbf{u}) + B_{w,v}I_{w,v}(s, \mathbf{u}) \\ = \Pi_f K_{w,v} I_v^\circ(\Theta_w(s)) + \frac{\Sigma_{w,v}}{4\pi} \int_0^{4\pi} p_w(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}) I_{w,v}(s_1, \mathbf{u}') d\Omega' \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans le cas ST/ST, elle prend, pour une phase γ , la forme

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\gamma,v}}{ds}(s, \mathbf{u}) + B_{\gamma,v}I_{\gamma,v}(s, \mathbf{u}) \\ = \Pi_\gamma K_{\gamma,v} n_{\gamma,v}^2 I_v^\circ(\Theta_\gamma(s)) \\ + \frac{\Sigma_{f \rightarrow \gamma,v}}{4\pi} \int_0^{4\pi} p_{f \rightarrow \gamma,v}(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}) I_{f,v}(s_1, \mathbf{u}') d\Omega' \\ + \frac{\Sigma_{s \rightarrow \gamma,v}}{4\pi} \int_0^{4\pi} p_{s \rightarrow \gamma,v}(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}) I_{s,v}(s_1, \mathbf{u}') d\Omega'. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dans le cas ST/T, l'équation (2.29) est valable pour la phase solide semi-transparente ; pour la phase fluide transparente, il suffit d'annuler $K_{f,v}$ dans l'équation (2.29).

On retrouve dans les équations (2.28) et (2.29) les propriétés radiatives présentées dans la sous-section 2.2.2. Cela signifie qu'un milieu généralement non-beerien le devient à la limite des grandes épaisseurs optiques. Cette forme ne peut concrètement être utilisée que pour des épaisseurs optiques supérieures à 3 (voire 5).

2.3.2 Loi de Fourier radiative

On peut effectuer un développement perturbatif des équations (2.28) et (2.29) en fonction d'un paramètre de perturbation $Kn = 1/(B_{\gamma,v}\delta)$, où δ est la plus





2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

petite échelle de longueur à laquelle le milieu est optiquement épais (TAINE et IACONA, 2012). On montre alors que le vecteur flux radiatif \mathbf{q}_γ^R prend une expression simple en fonction des températures des phases présentes dans le milieu poreux. On peut séparer l'expression du champ de puissance radiative en des contributions d'ordre 0 et d'ordre 1 :

$$\mathcal{P}_\gamma^R = \mathcal{P}_\gamma^{R(0)} + \mathcal{P}_\gamma^{R(1)}. \quad (2.30)$$

Le terme d'ordre 0 représente les interactions entre phases au sein d'un élément de volume du milieu poreux, tandis le terme d'ordre 1 représente les échanges entre volumes adjacents, au sein d'une même phase ou entre deux phases. Cette décomposition est possible dans tous les cas, mais seule la configuration ST/ST présente un terme d'ordre 0 non-nul. Lorsqu'une seule phase homogénéisée émet et absorbe du rayonnement (cas O/T et ST/T), la contribution d'ordre 0 est nulle.

Cas O/T. Le champ de puissance radiative ne comprend qu'une contribution d'ordre 1 de type loi de Fourier et a pour expression

$$\mathcal{P}_w^R = \mathcal{P}_w^{R(1)} = \nabla \cdot (k_w^R \nabla \Theta_w). \quad (2.31)$$

k_w^R est la conductivité radiative⁷. Le milieu étant statistiquement isotrope, la fonction de phase de diffusion ne dépend en pratique que du cosinus de l'angle de diffusion μ . La conductivité radiative est alors donnée par (TAINE, BELLET et al., 2010)

$$k_w^R(\Theta_w) = \frac{4\pi}{3} \Pi_f \int_0^\infty \frac{1}{B_{w,\nu} - \Sigma_{w,\nu} g_{w,\nu}} \frac{\partial I_\nu^\circ}{\partial T}(\Theta_w) d\nu, \quad (2.32)$$

où $g_{w,\nu}$ est le paramètre d'asymétrie de la diffusion, défini par (SIEGEL et HOWELL, 2002)

$$g_{w,\nu} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_{w,\nu}(\mu) \mu d\mu. \quad (2.33)$$

⁷La conductivité radiative est un scalaire dans le cas isotrope, mais il s'agit en fait d'un tenseur dans le cas général.





2.3. Limite d'un milieu optiquement épais

Cas ST/ST. Dans le cas ST/ST, le terme d'ordre 0 est généralement prépondérant dans la plupart des applications (CHAHLAFI et al., 2012), et il a pour expression

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_f^{R(0)} &= -\mathcal{P}_s^{R(0)} \\ &= \int_0^\infty \frac{\Pi_f n_{f,v}^2 K_{f,v} K_{s,v} \Sigma_{fs,v}}{K_{f,v} K_{s,v} + K_{f,v} \Sigma_{sf,v} + K_{s,v} \Sigma_{fs,v}} \left[I_v^\circ(\Theta_s) - I_v^\circ(\Theta_f) \right] dv.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Les contributions d'ordre 1 ont une expression de type loi de Fourier :

$$\mathcal{P}_\gamma^{R(1)} = \nabla \cdot \left(k_{\gamma f}^R \nabla \Theta_f + k_{\gamma s}^R \nabla \Theta_s \right), \quad \gamma = f, s. \quad (2.35)$$

Cas ST/T. Comme mentionné plus haut, seul le terme d'ordre 1 de la puissance radiative est non-nul. Il a pour expression

$$\mathcal{P}_s^R = \mathcal{P}_s^{R(1)} = \nabla \cdot \left(k_s^R \nabla \Theta_s \right). \quad (2.36)$$

Critère de validité de la loi de Fourier radiative. GOMART et TAINE (2011) ont établi un critère quantitatif de validité de la loi de Fourier radiative. Celle-ci est valide en un point M si :

- M n'appartient pas à une couche limite radiative, c.-à-d. qu'il se trouve à une distance supérieure à $l_b^R = 5/\kappa_\gamma^{\text{eff}}$ de toute interface entre le milieu poreux et un autre milieu⁸. $\kappa_\gamma^{\text{eff}}$ est un coefficient d'absorption effectif qui tient compte de la diffusion multiple ;
- le champ de température Θ_γ satisfait au point M la condition

$$\frac{1}{\Theta_\gamma} \frac{d\Theta_\gamma}{dx} < \eta \kappa_\gamma^{\text{eff}}. \quad (2.37)$$

η dépend de la précision relative souhaitée sur le flux donné par la loi de Fourier radiative (GOMART et TAINE, 2011) :

$$\eta = \begin{cases} 0,033 & \text{pour une précision relative de 1 \%} \\ 0,072 & \text{pour une précision relative de 5 \%} \\ 0,098 & \text{pour une précision relative de 10 \%} \end{cases} \quad (2.38)$$

⁸Cette condition garantit que le milieu est optiquement épais dans toutes les directions.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

L'équation (2.37) doit être satisfaite à toute échelle de longueur dx , à partir de la plus petite échelle à laquelle Θ_γ est résolue. Les variations abruptes de la température rendent donc la loi de Fourier radiative inutilisable.

2.4 Exemple d'application : caractérisation d'un milieu statistiquement homogène et isotrope

Cette section illustre les points abordés précédemment et présente un exemple de caractérisation d'un milieu statistiquement isotrope et uniforme. Les milieux considérés sont de type DOTS⁹. Ces milieux sont constitués d'une matrice solide opaque percée de cavités sphériques transparentes aléatoirement disposées et pouvant se recouvrir. Les rayons des sphères sont tirés aléatoirement suivant une loi de probabilité donnée. Par souci de concision, les résultats sont donnés sans préciser la dépendance en fréquence ; cependant, le milieu n'est pas nécessairement gris. Quelques données géométriques essentielles à la caractérisation sont rappelées, et les propriétés radiatives de certains exemples de ces milieux sont présentées. Les résultats présentés dans cette section sont publiés dans un article intitulé « Generalized radiative transfer equation for porous medium upscaling: Application to the radiative Fourier law » (TAINÉ, BELLET et al., 2010).

2.4.1 Particularités géométriques

Un milieu DOTS suivant une distribution de rayons de sphères donnée est défini par son aire spécifique A (aire interfaciale par unité de volume du milieu poreux) et sa porosité Π_f . A est liée au coefficient d'extinction à la limite d'un milieu optiquement mince (voir sous-section 2.1.5) par la relation

$$\beta^{\text{ot}} = \frac{A}{4\Pi_f}. \quad (2.39)$$

Les rayons des sphères composant le milieu suivent une loi de probabilité caractérisée par un rayon moyen $\langle R \rangle$ et éventuellement un écart-type δ . $\langle R \rangle$ est lié à A , Π_f et δ par des relations géométriques dépendant de la loi considérée.

⁹Dispersed radii overlapping transparent spheres.





2.4. Exemple d'application : caractérisation d'un milieu

2.4.1.1 Relations géométriques

On se limitera aux lois suivantes pour la distribution des rayons R des sphères : rayon constant R (distribution de Dirac), loi uniforme sur un intervalle $\langle R \rangle \pm \delta \langle R \rangle$, loi gaussienne d'écart-type δ . Les expressions du rayon des sphères pour les lois uniforme et gaussienne sont

$$R = \langle R \rangle \left(1 + \delta(1 - 2z) \right) \quad \text{pour une loi uniforme,} \quad (2.40)$$

$$R = \langle R \rangle \left(1 + \delta \sqrt{-2 \ln z_1} \cos(2\pi z_2) \right) \quad \text{pour une loi gaussienne,} \quad (2.41)$$

où z , z_1 et z_2 sont des variables aléatoires uniformes comprises entre 0 et 1.

TORQUATO et LU (1993) donnent des relations géométriques fondamentales entre A , Π_f et les moments de la distribution des rayons des sphères¹⁰ :

$$\Pi_f = 1 - \exp \left(-n^+ \frac{\langle R^3 \rangle}{\langle R \rangle^3} \right), \quad (2.42)$$

$$A = -3 \frac{\langle R^2 \rangle}{\langle R^3 \rangle} \ln(1 - \Pi_f) \times \left(\frac{1}{\Pi_f} - 1 \right), \quad (2.43)$$

où n^+ est la densité volumique de sphères adimensionnée, liée à la densité volumique de sphères n par la relation

$$n^+ = \frac{4\pi}{3} \langle R \rangle^3 n. \quad (2.44)$$

Pour un échantillon cubique de taille r_0 , le nombre de sphères N_s est donné par la relation

$$N_s = r_0^3 n = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{r_0}{\langle R \rangle} \right)^3 n^+. \quad (2.45)$$

$\langle R \rangle$ et n^+ sont donnés en fonction de Π_f et β^{ot} par des relations déterminées à partir des équations (2.40) à (2.43), et reportées dans la table 2.1.

Les données de A (ou β^{ot}), Π_f , δ et r_0 suffisent à la construction d'une réalisation du milieu.

¹⁰On notera que TANCREZ et TAINE (2004) privilégient l'utilisation de l'aire spécifique adimensionnée $A^+ = A \langle R \rangle$.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

TABLE 2.1: Relations géométriques dans les milieux DOTS.

Loi	$\langle R \rangle$	n^+
R constant	$-\frac{3}{4} \left(\frac{1}{\Pi_f} - 1 \right) \ln(1 - \Pi_f) \frac{1}{\beta^{\text{ot}}}$	$-\ln(1 - \Pi_f)$
Gaussienne	$-\frac{3}{4} \left(\frac{1}{\Pi_f} - 1 \right) \ln(1 - \Pi_f) \frac{1 + \delta^2}{1 + 3\delta^2} \frac{1}{\beta^{\text{ot}}}$	$\frac{-\ln(1 - \Pi_f)}{1 + \delta^2}$
Uniforme	$-\frac{3}{4} \left(\frac{1}{\Pi_f} - 1 \right) \ln(1 - \Pi_f) \frac{1 + \delta^2/3}{1 + \delta^2} \frac{1}{\beta^{\text{ot}}}$	$\frac{-\ln(1 - \Pi_f)}{1 + \delta^2/3}$

2.4.1.2 Construction d'une réalisation du milieu pour la caractérisation

Dans le cas d'une caractérisation par la méthode RDFI, le coefficient d'extinction β est toujours supérieur à β^{ot} (TANCREZ et TAINE, 2004). Il est donc physiquement pertinent d'exprimer les fonctions de distribution cumulées en fonction d'une abscisse adimensionnée $s^+ = \beta^{\text{ot}} s$: l'extinction sur une tranche d'épaisseur s^+ est de l'ordre de e^{-s^+} . Un paramètre clé est l'épaisseur optique maximale s_{max}^+ à laquelle on souhaite déterminer les fonctions de distribution radiatives. s_{max}^+ est choisie arbitrairement (typiquement de l'ordre de 7 dans le cas des milieux DOTS).

On effectue les calculs en utilisant un système de coordonnées adimensionnées par la taille r_0 de l'échantillon cubique. La taille adimensionnée de l'échantillon est donc

$$r_0^* = 1. \quad (2.46)$$

Les longueurs de tirs adimensionnées sont définies par

$$s^* = s/r_0. \quad (2.47)$$

Les tirs de rayons sont effectués dans un cube de taille adimensionnée 0,2 centré dans l'échantillon (voir figure 2.4). La distance adimensionnée la plus courte pouvant être parcourue par un rayon avant de quitter l'échantillon vaut 0,4. Ce doit être la longueur adimensionnée de tir garantissant une extinction de l'ordre de $e^{-s_{\text{max}}^+}$; on la notera $s_{\text{max}}^* \cdot s_{\text{max}}^+$ et s_{max}^* sont liées par la relation :

$$s_{\text{max}}^* = 0,4 = \frac{s_{\text{max}}^+}{\beta_{\text{ot}}^*} \quad (2.48)$$

2.4. Exemple d'application : caractérisation d'un milieu

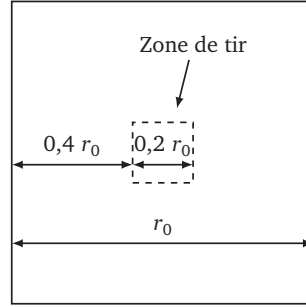


FIGURE 2.4: Domaine de tir pour la caractérisation radiative des milieux DOTS.

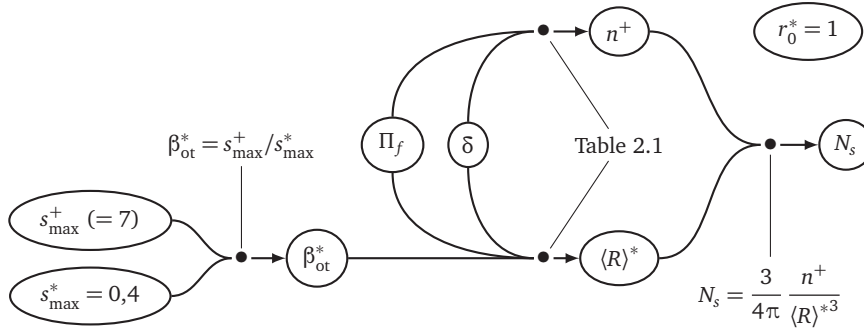


FIGURE 2.5: Variables intervenant dans la caractérisation radiative d'un milieu DOTS.

où $\beta_{ot}^* = \beta_{ot} r_0$. Le nombre de sphères N_s contenues dans l'échantillon est donné par l'équation (2.45). Le rayon moyen adimensionné $\langle R \rangle^*$ est donné par la table 2.1. La figure 2.5 donne l'ensemble des relations liant les différentes variables intervenant dans la caractérisation.

Le calcul de caractérisation permet de déterminer les fonctions de distribution radiatives en fonction de s^* . Le passage de s^* à s^+ est donné par la relation (2.48). Le passage à des grandeurs dimensionnées est fait en utilisant la valeur de A pour déduire β_{ot} à partir de la relation (2.39). La figure 2.6 rappelle l'ensemble des relations permettant le passage à des grandeurs dimensionnées.

2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

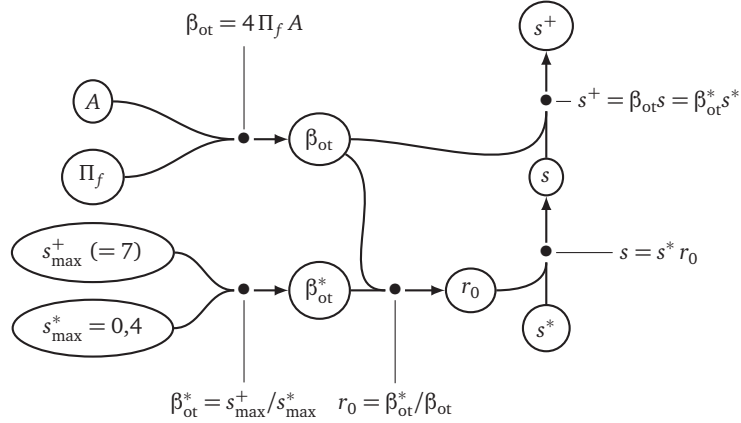


FIGURE 2.6: Passage à des grandeurs dimensionnées.

2.4.2 Caractérisation

Les calculs sont effectués pour des milieux IOTS¹¹ (les sphères ont un rayon constant). Les fonctions de distribution statistiques sont déterminées, pour une porosité donnée, en effectuant un total de 10^6 tirs (10^4 réalisations, 100 tirs par réalisation). On se place ainsi dans des conditions identiques à celles de TANCREZ et TAINE (2004). Les résultats obtenus ont un écart-type relatif inférieur à 10^{-3} sur G_w^{ext} .

La caractérisation radiative des milieux est faite en utilisant l'algorithme de Monte Carlo mis en œuvre par TANCREZ et TAINE (2004) et décrit succinctement à la sous-section 2.1.2. Le calcul d'une fonction de distribution cumulée prend entre 5 min (pour $\Pi_f = 0,18$) et 10 h (pour $\Pi_f = 0,82$). La valeur de s_{\max}^+ est fixée à 7.

2.4.2.1 Fonctions de distribution statistiques

Fonction de distribution cumulée d'extinction. La fonction de distribution cumulée d'extinction est représentée sur la figure 2.7 pour des porosités allant de 0,18 à 0,82. La pente de $\ln(1 - G_w^{\text{ext}})$ en $s^+ = 0$ est égale à -1 , quelle que soit la porosité : le milieu est beerien à la limite d'un milieu optiquement mince, avec un coefficient d'extinction égal à β_{ot} .

¹¹Identical overlapping transparent spheres.



2.4. Exemple d'application : caractérisation d'un milieu

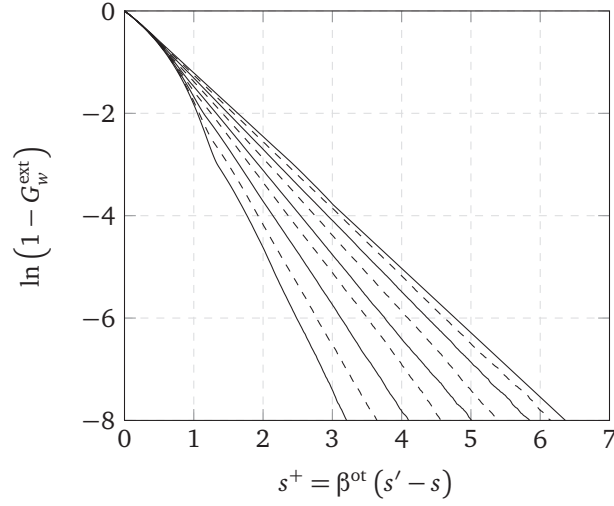


FIGURE 2.7: Fonction de distribution cumulée d'extinction d'un milieu IOTS (distribution de rayons de type Dirac). Porosités représentées (de gauche à droite) : 0,18 ; 0,26 ; 0,37 ; 0,48 ; 0,56 ; 0,65 ; 0,72 ; 0,78 ; 0,82.

Le milieu est non-beerien aux porosités intermédiaires : $\ln(1 - G_w^{\text{ext}})$ n'est pas une droite. Aux grandes épaisseurs optiques (à la limite d'un milieu optiquement épais), le milieu redevient beerien avec un coefficient d'extinction dépendant de la porosité.

Fonction de distribution cumulée d'absorption. Si une loi de réflexion diffuse est choisie, la probabilité cumulée d'absorption est proportionnelle à la fonction de distribution cumulée d'extinction :

$$P_w^{\text{a,spec}}(s^+) = \alpha_w^{\text{diff}} G_w^{\text{ext}}(s^+) \quad (2.49)$$

où α_w^{diff} est l'absorptivité (isotrope¹²) des parois.

Si la loi de réflexion aux parois est spéculaire, la probabilité d'absorption n'est pas proportionnelle à G_w^{ext} . L'absorptivité, pour un rayon atteignant une paroi avec un cosinus d'angle d'incidence μ_i , est donnée par

$$\alpha_w^{\text{spec}} = \frac{3}{2} \alpha_w^{\text{h,spec}} \mu_i \quad (2.50)$$

¹²De ce fait, α_w^{diff} est égale à l'absorptivité hémisphérique $\alpha_w^{\text{h,diff}}$.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

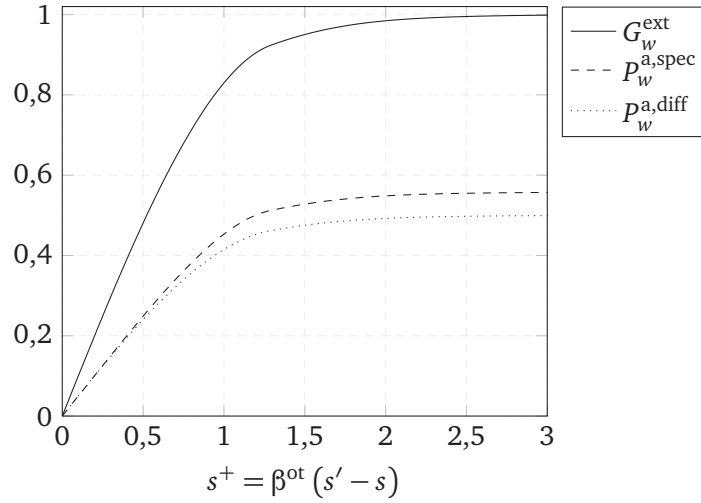


FIGURE 2.8: Probabilité cumulée d'absorption d'un milieu IOTS ($\Pi_f = 0,26$, $\alpha_w^{h,spec} = \alpha_w^{diff} = 0,5$).

où $\alpha_w^{h,spec}$ est l'absorptivité hémisphérique. Le calcul de la probabilité cumulée d'absorption se fait donc en pratique en utilisant le cumul des cosinus des angles d'incidence des rayons tirés en fonction de l'abscisse s . La figure 2.8 donne à titre indicatif quelques exemples de probabilité cumulée d'absorption.

Fonction de phase de diffusion. La fonction de phase de diffusion dans le cas d'une loi de réflexion diffuse est définie par (TANCREZ et TAINE, 2004)

$$p_w^{diff}(\mu_s) = \frac{dG_w^{s,diff}}{d\mu}(\mu_s), \quad (2.51)$$

où μ_s est le cosinus de l'angle de diffusion, et $G_w^{s,diff}$ est la fonction de distribution cumulée des μ_s . $G_w^{s,diff}(\mu_s)$ est déterminée pendant le calcul.

Dans le cas d'une loi de réflexion spéculaire, la relation entre le cosinus de l'angle de diffusion μ_s et celui de l'angle incident μ_i est univoque. La fonction de phase de diffusion est donc entièrement déterminée grâce à la fonction de distribution cumulée G_w^i des μ_i . Elle est donnée par la relation (TANCREZ et

2.4. Exemple d'application : caractérisation d'un milieu

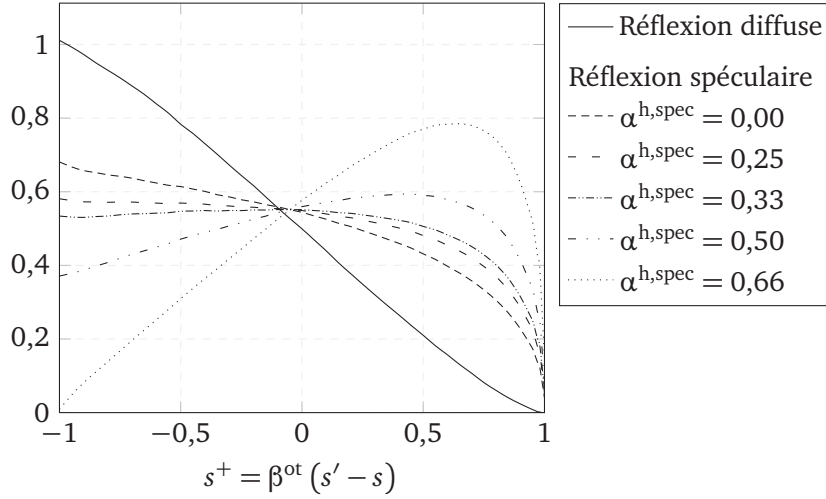


FIGURE 2.9: Exemples de fonctions de phase de diffusion d'un milieu IOTS. $\Pi_f = 0,65$.

TAINE, 2004)

$$p_w^{\text{spec}}(\mu_s) = \frac{F_w^i\left(\sqrt{\frac{1-\mu_s}{2}}\right) \rho_w^{\text{spec}}\left(\sqrt{\frac{1-\mu_s}{2}}\right)}{4\sqrt{\frac{1-\mu_s}{2}} \int_0^1 F_w^i(\mu) \rho_w^{\text{spec}}(\mu) d\mu} \quad (2.52)$$

où $\rho_w^{\text{spec}}(\mu) = 1 - \alpha_w^{\text{spec}}(\mu)$ est la réflectivité et où $F_w^i(\mu_i) = \frac{dG_w^i}{d\mu}(\mu_i)$. La figure 2.9 donne quelques exemples de fonctions de phase de diffusion.

2.4.2.2 Propriétés radiatives effectives à la limite d'un milieu optiquement épais

Coefficient d'extinction généralisé. La détermination du coefficient d'extinction généralisé B_w se fait grâce à la définition présentée dans la sous-section 2.2.2. La valeur du coefficient d'extinction adimensionné $B_w^+ = B_w/\beta^{ot}$ est représentée en fonction de la porosité sur la figure 2.10. D'autres résultats, obtenus pour des configurations identiques à celles de TANCREZ et TAINE (2004), permettent d'effectuer une comparaison entre les valeurs de B_w^+ et celles du

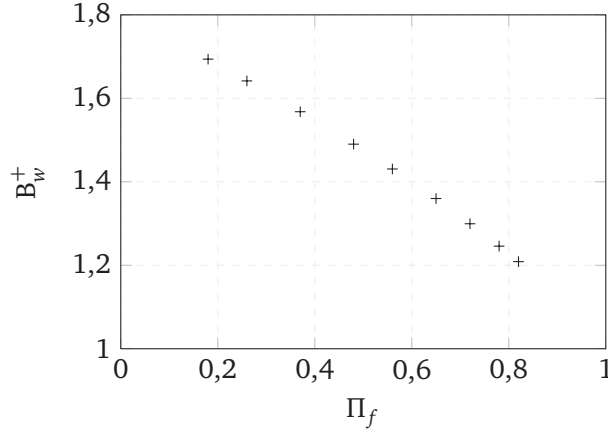


FIGURE 2.10: Coefficient d'extinction généralisé adimensionné B_w^+ d'un milieu IOTS en fonction de la porosité.

coefficient d'extinction adimensionné β_w^+ obtenu par la méthode RDFI (voir figure 2.11).

Coefficient d'absorption généralisé. K_w est donné par l'équation (2.18). On adimensionne K_w en définissant

$$K_w^+ = \frac{K_w}{\alpha_w^h B_w}. \quad (2.53)$$

Si on considère une loi de réflexion diffuse, alors on obtient

$$K_w^{+,diff} = 1. \quad (2.54)$$

Si une loi de réflexion spéculaire est considérée, alors K_w^+ dépend de Π_f . La figure 2.12 donne la valeur de $K_w^{+,spec}$ en fonction de la porosité. $K_w^{+,spec}$ varie entre 1,075 et 1,117 dans l'intervalle de porosité considéré, avec une moyenne de 1,101, soit une variation relative de 3,7 % autour de cette valeur.

Paramètre d'asymétrie de la diffusion. Dans le cas de la réflexion diffuse, le paramètre d'asymétrie de la diffusion est indépendant de l'absorptivité des parois. On a

$$g_w^{diff} = -0,183 \pm 1 \times 10^{-3}. \quad (2.55)$$

2.4. Exemple d'application : caractérisation d'un milieu

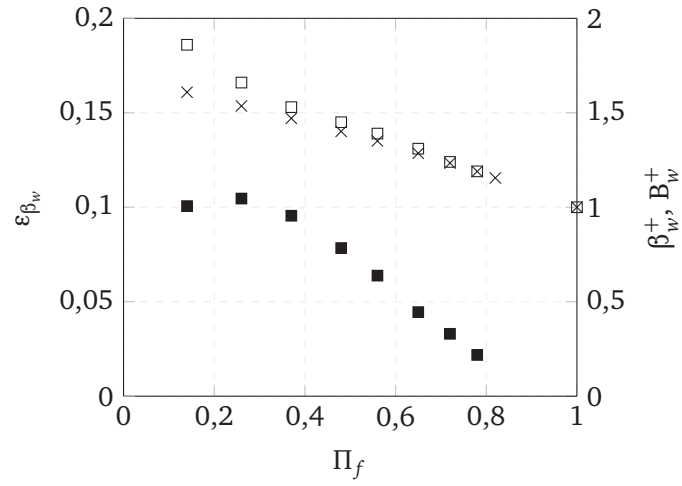


FIGURE 2.11: Comparaison du coefficient d'extinction généralisé adimensionné B_w^+ (x) avec le coefficient d'extinction adimensionné β_w^+ (□) obtenu par la méthode RDFI (TANCREZ et TAINE, 2004) pour un milieu DOTS ; écart-type relatif ϵ_{β_w} associé à la détermination de β_w^+ (■). Distribution de rayons uniforme, $\delta = 0,9$.

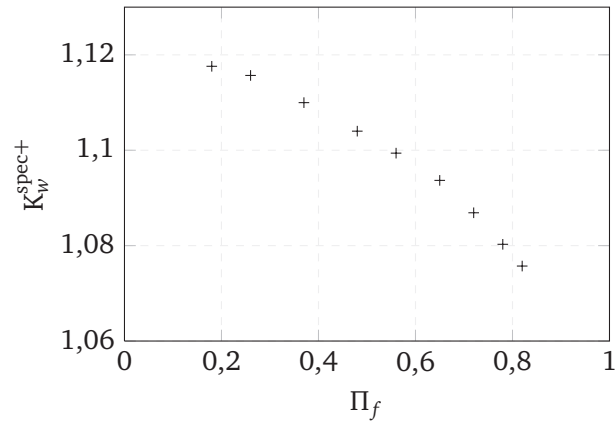


FIGURE 2.12: Coefficient d'absorption généralisé adimensionné K_w^{spec+} d'un milieu IOTS en fonction de la porosité.



2. HOMOGÉNÉISATION STATISTIQUE DU RAYONNEMENT

Pour une loi de réflexion spéculaire, le paramètre d'asymétrie de la diffusion dépend de l'absorptivité hémisphérique :

$$g_w^{\text{spec}} = 0,8913 \alpha_w^{\text{h,spec}^3} - 0,4110 \alpha_w^{\text{h,spec}^2} + 0,1688 \alpha_w^{\text{h,spec}} - 0,07772. \quad (2.56)$$

Ce résultat est obtenu en utilisant la méthode des moindres carrés (écart-type relatif de 0,013). Cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Son minimum vaut $-0,0777$, et son maximum vaut $0,571$.

Conductivité radiative. Les équations (2.32) et (2.39) ainsi que les définitions de B_w^+ et K_w^+ permettent d'écrire

$$k_w^R(\Theta_w) = \frac{16\pi}{3} \frac{\Pi_f^2}{A} \frac{1}{B_w^+} \int_0^\infty \frac{1}{1 - (1 - \alpha_w^h K_w^+) g_w} \frac{\partial I_v^\circ}{\partial T}(\Theta_w) dv, \quad (2.57)$$

ce qui, pour un milieu gris, devient

$$k_w^R(\Pi_f, A, \alpha_w^h, \Theta_w) = \frac{64\pi}{3} \frac{\Pi_f^2}{A} \frac{1}{B_w^+} \frac{\sigma \Theta_w^3}{1 - (1 - \alpha_w^h K_w^+) g_w}. \quad (2.58)$$

2.5 Conclusion : particularités du modèle

Ce chapitre a présenté la méthode d'homogénéisation statistique utilisée dans la suite pour modéliser les transferts radiatifs. On rappelle en conclusion un certain nombre de particularités qui distinguent cette approche des autres méthodes d'homogénéisation :

Application à des milieux complexes. Il est possible de prédire les propriétés radiatives et les transferts dans des milieux non-beeriens, statistiquement anisotropes et statistiquement hétérogènes. La caractérisation des milieux réels peut être faite au moyen de données issues de tomographies X ou γ , avec pour seules données physiques les propriétés radiatives des phases non-homogénéisées, qui doivent être connues avec une résolution spatiale inférieure à celle de la tomographie. Il est possible de traiter avec cette approche de nombreuses combinaisons de phases opaques, transparentes ou semi-transparentes.

Description homogénéisée valable à toute échelle. Les propriétés radiatives des phases homogénéisées sont en principe valables à toute échelle de





2.5. Conclusion : particularités du modèle

longueur. La résolution à laquelle elles sont définies n'est limitée que par celle de la tomographie ayant servi à les déterminer. La GRTE dépend du phénomène d'émission, qui repose (à l'ETL de la matière) sur la définition d'un champ de température pour la matière. La résolution de ce champ de température est en pratique la principale limitation spatiale du modèle. Le modèle d'homogénéisation statistique se distingue fondamentalement de méthodes de changement d'échelle requérant la séparation des échelles locale et macroscopique, parmi lesquelles la prise de moyenne volumique.

Modèle unifié pour toutes les épaisseurs optiques. Le modèle homogénéisé est valable aux faibles épaisseurs optiques et dégénère en des formes plus simples et d'usage courant à la limite des grandes épaisseurs optiques (ETR classique, loi de Fourier radiative).





Chapitre 3

Méthode de changement d'échelle couplé

COMME MENTIONNÉ en introduction, la modélisation des couplages entre rayonnement, conduction et convection dans les milieux poreux est complexe et représente un enjeu majeur pour de nombreuses applications à haute température, notamment dans les domaines de l'énergie, des procédés ou encore de l'aérospatiale. Ce chapitre est dédié à l'élaboration d'un modèle macroscopique de transferts thermiques prenant en compte le rayonnement. Il tire parti des particularités de l'homogénéisation statistique du rayonnement pour fournir une description à l'échelle locale des phénomènes de couplage, qui peut ensuite être homogénéisée au moyen d'une méthode de changement d'échelle éprouvée pour les autres modes de transfert. Dans ce travail, la méthode de prise de moyenne volumique (WHITAKER, 1999) est utilisée.

L'homogénéisation des transferts thermiques conductifs et convectifs par prise de moyenne volumique, en l'absence de transferts radiatifs, a été étudiée dans les contextes de l'équilibre thermique local et du non-équilibre thermique local (CARBONELL et WHITAKER, 1984 ; MOYNE, 1997 ; QUINTARD, KAVIANY et al., 1997 ; QUINTARD et WHITAKER, 1993a, 1995, 2000). La première approche, qui consiste à supposer que les températures moyennes des différentes phases sont suffisamment proches pour être considérées comme égales, conduit à un modèle de transferts homogénéisés à une équation. Dans la deuxième approche, les températures des phases sont traitées indépendamment, ce qui conduit à un modèle de transferts homogénéisés à n équations, n étant le nombre de phases.

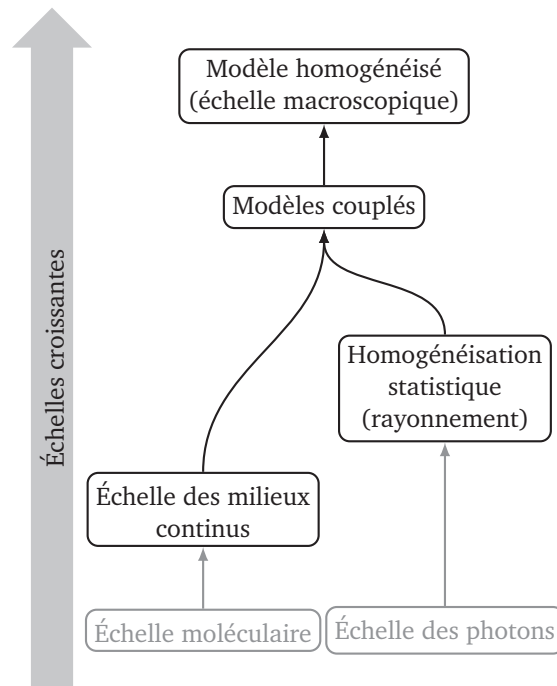


FIGURE 3.1: Principe de la démarche de changement d'échelle.

Dans les deux cas, les effets de la microstructure du milieu et les couplages entre les phases sont représentés par des propriétés effectives que l'on détermine en résolvant des problèmes de fermeture à l'échelle locale. Ces propriétés effectives comprennent notamment des effets de dispersion lorsque les transferts convectifs sont pris en compte. Les bilans homogénéisés peuvent également inclure des termes additionnels, absents dans les bilans d'énergie pour les milieux homogènes. On retiendra en particulier la présence de termes croisés couplant les différentes phases dans le cas du non-équilibre thermique local.

Certains développements incluent par ailleurs des termes sources hétérogènes ou homogènes (QUINTARD, LADEVIE et al., 2000 ; QUINTARD et WHITAKER, 2000 ; WHITAKER, 1998). Le modèle développé dans ce chapitre, fondé sur le non-équilibre thermique local, présente certaines similitudes avec ces études. Il consiste à construire un modèle de transferts associant un modèle de transfert dans la matière (conduction et convection) à l'échelle des milieux continus et

3.1. Équations de base

une description homogénéisée des transferts radiatifs obtenue par homogénéisation statistique. Ce bilan d'énergie est ensuite homogénéisé au moyen de la méthode de prise de moyenne volumique. La figure 3.1 illustre le principe de cette méthode. L'association du modèle de transport à l'échelle des milieux continu et du modèle de transferts radiatifs plusieurs difficultés majeures qu'on résoudra en premier lieu.

Dans la suite, le milieu poreux considéré est constitué d'une phase solide s non-déformable et d'une phase fluide f . Ces deux phases constituent le système matériel, siège des transferts convectifs et conductifs. On supposera ici la phase fluide transparente et la phase solide opaque, ce qui nous place dans le cas opaque/transparent présenté au chapitre 2. De fait, la phase fluide sera considérée comme gazeuse, les liquides étant plutôt semi-transparents. Les cas semi-transparent/semi-transparent et semi-transparent/transparent peuvent être traités de façon similaire (voir annexe A). On supposera par ailleurs, pour des raisons de simplicité, que le milieu est statistiquement isotrope et uniforme. La généralisation à des milieux statistiquement anisotropes ou hétérogènes peut être faite en utilisant un formalisme proche, les questions fondamentales de compatibilité des modèles étant traitées de la même façon.

La section 3.1 présente les équations de bilan à partir desquelles le modèle est construit. La section 3.2 aborde la question de la compatibilité des échelles de longueur mises en jeu dans les deux modèles de transport que l'on associe. La section 3.3 présente les solutions apportées pour construire le modèle transferts couplés à partir de la méthode d'homogénéisation statistique du rayonnement et du modèle de transfert à l'échelle des milieux continus dans la matière. La section 3.4 aborde la question du changement d'échelle par prise de moyenne volumique. Enfin, la section 3.5 évoque brièvement la méthode de résolution devant être utilisée pour déterminer les transferts au moyen du modèle couplé.

3.1 Équations de base

L'originalité du modèle présenté est d'associer une description statistique homogénéisée des transferts radiatifs à un modèle de transferts dans la matière à l'échelle des milieux continus. La description statistique des transferts radiatifs présente la particularité de remplacer la séparation spatiale des phases par une probabilité de présence en tout point, égale à la fraction volumique Π_γ , avec $\gamma = f$ ou s . Ainsi, les propriétés radiatives du milieu poreux considéré sont continûment définies dans tout le volume, avec une résolution égale à



3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

la taille de l'unité d'information géométrique dont on dispose pour le milieu. Cette échelle de longueur, notée l_t , est le plus couramment la résolution d'une image du milieu obtenue par tomographie aux rayons X ou γ (voir section 2.5) ; elle est plus petite que la taille caractéristique du pore l_f .

Dans le cas O/T considéré ici, les transferts radiatifs ont lieu entre parois et dans la phase fluide transparente. On représente cette phase propagation par l'indice w . Les transferts sont déterminés en résolvant l'équation de transfert radiatif généralisée et leur action sur la matière est régie par le champ de puissance radiative \mathcal{P}_w^R (voir section 2.2.5). Cependant, il est plus pertinent de transformer cette puissance volumique en un flux surfacique isotrope équivalent $\varphi_w^R = \mathcal{P}_w^R/A$, où A est l'aire interfaciale par unité de volume du milieu.

À l'inverse, le modèle de transport dans la matière conserve, à l'échelle de longueur considérée, une représentation discrète de chaque phase. Chaque phase possède donc son bilan d'énergie. On aura donc, dans la phase fluide, dans laquelle on négligera les effets de compressibilité et de dilatabilité et le terme dû au travail des forces visqueuses,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f c_{pf} T_f) + \nabla \cdot (\rho_f c_{pf} \mathbf{v}_f T_f) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f). \quad (3.1)$$

Pour la phase solide, supposée indéformable, on aura

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_{ps} T_s) = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s). \quad (3.2)$$

Dans ces équations, ρ_γ , $c_{p\gamma}$, T_γ , \mathbf{v}_γ et k_γ sont respectivement la masse volumique, la capacité thermique volumique, la température, la vitesse et la conductivité thermique de la phase γ . On ne prendra par ailleurs pas en compte l'action du bilan d'énergie sur le bilan de quantité de mouvement, car cela représenterait une source de complexification du problème non nécessaire au traitement du couplage avec le rayonnement. Le champ de vitesse est donc considéré comme une donnée indépendante du bilan d'énergie.

3.2 Compatibilité des échelles de longueur

La nature différente des transferts radiatifs par rapport à la conduction et à la convection a jusqu'à présent conduit à élaborer des méthodes d'homogénéisation différentes selon le mode de transfert. Ces méthodes sont incompatibles entre elles et il est par conséquent impossible de les utiliser conjointement pour





3.2. Compatibilité des échelles de longueur

obtenir un modèle macroscopique couplé à partir de la description de chaque mode de transfert à l'échelle locale.

La solution alternative adoptée ici consiste à inclure les transferts radiatifs homogénéisés dans le bilan d'énergie de la matière à l'échelle locale. Le bilan d'énergie obtenu peut ensuite être homogénéisé en utilisant une méthode de changement d'échelle adaptée à la conduction et à la convection. Les procédures d'homogénéisation se font donc de manière séquentielle. Il est toutefois nécessaire de s'assurer de la disponibilité d'une description homogénéisée du rayonnement à une échelle de longueur à laquelle la conduction et la convection ne sont pas encore homogénéisées (au sens de la prise de moyenne volumique).

La méthode de prise de moyenne volumique repose sur l'application d'un opérateur de prise de moyenne volumique

$$\langle \Psi_\gamma \rangle^m = \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{V}_\gamma^m} \Psi_\gamma d\mathcal{V}, \quad (3.3)$$

aux termes des équations de bilan local pour chacune des phases. $\langle \Psi_\gamma \rangle^m$ est la moyenne superficielle de la quantité générique Ψ_γ , dans la phase γ , rapportée au volume \mathcal{V}^m . \mathcal{V}_γ^m est la partie de \mathcal{V}^m occupée par la phase γ . On fera également usage de la moyenne intrinsèque de phase, définie par

$$\langle \Psi_\gamma \rangle^{m\gamma} = \frac{1}{\mathcal{V}_\gamma^m} \int_{\mathcal{V}_\gamma^m} \Psi_\gamma d\mathcal{V}. \quad (3.4)$$

Les moyennes superficielle et intrinsèque sont liées par la relation

$$\langle \Psi_\gamma \rangle^m = \Pi_\gamma \langle \Psi_\gamma \rangle^{m\gamma}. \quad (3.5)$$

Les théorèmes de prise de moyenne suivants sont utilisés lors de l'application de la méthode :

$$\langle \nabla \Psi_\gamma \rangle^m = \nabla \langle \Psi_\gamma \rangle^m + \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \Psi_\gamma d\mathcal{A}, \quad (3.6)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A}_\gamma \rangle^m = \nabla \cdot \langle \mathbf{A}_\gamma \rangle^m + \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{A}_\gamma d\mathcal{A}, \quad (3.7)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial t} \right\rangle^m = \frac{\partial \langle \Psi_\gamma \rangle^m}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{w}_{fs} \Psi_\gamma d\mathcal{A}, \quad (3.8)$$





3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

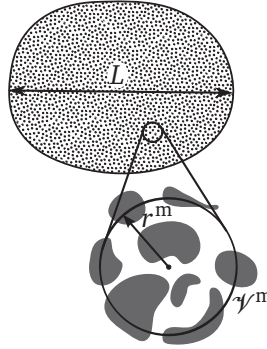


FIGURE 3.2: Échelles de longueur de la prise de moyenne volumique.

où \mathbf{A}_γ est une quantité vectorielle et \mathbf{w}_{fs} est la vitesse de l'interface fluide-solide. Enfin, la méthode requiert l'introduction de la décomposition spatiale (GRAY, 1975)

$$\Psi_\gamma = \langle \Psi_\gamma \rangle^{m\gamma} + \tilde{\Psi}_\gamma \quad (3.9)$$

où $\tilde{\Psi}_\gamma$ est la déviation de Ψ_γ dans la phase γ . Nous ne nous attarderons pas davantage sur la méthode de prise de moyenne volumique et renverrons le lecteur à la monographie de WHITAKER (1999) pour davantage d'informations.

Au cours des développements présentés ici, diverses approximations seront effectuées. Elles impliquent de nombreuses contraintes sur les échelles de longueur, résumées par WHITAKER (1998). Une simplification raisonnable de ces nombreuses contraintes peut s'écrire sous la forme (WHITAKER, 1999)

$$l_f, l_s \ll r^m, \quad (3.10)$$

$$(r^m)^2 \ll L^2, \quad (3.11)$$

où r^m est la taille de \mathcal{V}^m et L est celle du système (voir figure 3.2).

La méthode d'homogénéisation statistique présentée au chapitre 2 produit une description homogénéisée des transferts radiatifs dont la limite spatiale est en pratique imposée par la définition de la température utilisée pour déterminer l'émission (voir section 2.5). Il suffit donc de fournir au modèle de rayonnement un champ de température ayant une résolution spatiale inférieure à celle du volume de prise de moyenne \mathcal{V}^m pour pouvoir rendre compte des effets sur les transferts radiatifs des hétérogénéités du champ de température à l'échelle locale. Les termes sources radiatifs fournis par le modèle de rayonnement





3.3. Construction d'un modèle couplé à l'échelle locale

peuvent ensuite être insérés dans les bilans d'énergie non-homogénéisés. La définition du champ de température Θ_w qui va déterminer l'émission est donc un point essentiel de la construction du modèle.

3.3 Construction d'un modèle couplé à l'échelle locale : interactions entre modèles

L'interaction entre le modèle non-homogénéisé de transferts dans la matière (conduction et convection) et le modèle homogénéisé de transferts radiatifs passe par (i) la définition d'une température Θ_w pour déterminer l'émission à partir de la température T_w de la matière, et (ii) l'insertion du terme source radiatif fourni par le modèle de rayonnement dans le bilan d'énergie de façon physiquement pertinente.

Définition d'un champ de température pour l'émission. Dans le point de vue homogénéisé pour le modèle de rayonnement, les différentes phases du milieu ne sont plus spatialement séparées : cette séparation est remplacée par une probabilité de présence de la phase γ en tout point, égale à sa fraction volumique Π_γ . Le champ de température Θ_w apparaissant dans le terme source d'émission de la GRTE (et sa forme dégénérée à la limite d'un milieu optiquement épais) et dans la loi de Fourier radiative est continûment défini sur l'ensemble du volume du milieu poreux. Θ_w devant être la température de la matière, elle doit provenir du modèle non-homogénéisé des transferts dans la matière. On va donc utiliser la température de paroi T_w intervenant dans les bilans d'énergie non-homogénéisés pour construire Θ_w .

Contrairement à Θ_w , T_w est discontinûment définie : elle n'est pas définie hors de l'interface fluide-solide. On définit donc Θ_w à partir de T_w au moyen d'un opérateur de *prise de moyenne radiative* :

$$\Theta_w = \frac{1}{\mathcal{A}^R} \int_{\mathcal{A}^R} T_w d\mathcal{A} \quad (3.12)$$

C'est un opérateur de prise de moyenne associé à un volume \mathcal{V}^R inclus dans le volume de prise de moyenne \mathcal{V}^m (voir figure 3.3). \mathcal{A}^R est la partie de l'interface \mathcal{A} incluse dans \mathcal{V}^R .

\mathcal{V}^R est pris aussi petit que possible afin de conserver une représentation aussi précise que possible des variations de la température. La taille minimale de \mathcal{V}^R est celle garantissant qu'un élément de volume représentatif (au sens

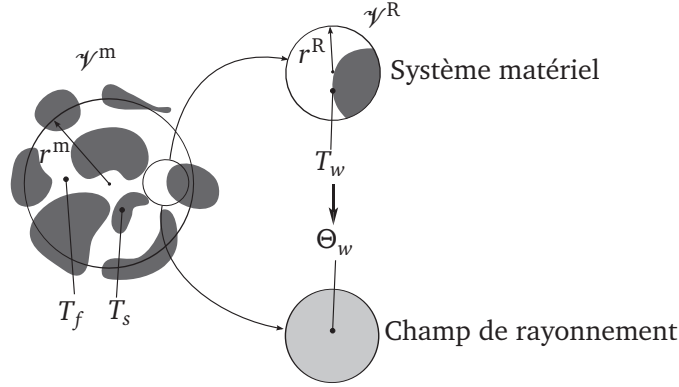


FIGURE 3.3: Volumes de prise de moyenne.

du rayonnement) de l'interface soit toujours inclus. Lorsque le problème macroscopique ne présente aucune direction dans laquelle il est invariant, cette taille minimale est de l'ordre de la taille caractéristique des phases l_γ . Lorsque le problème macroscopique présente une invariance spatiale (1 D ou 2 D), représenter les variations de la température dans les directions où le problème macroscopique est invariant n'a plus d'utilité. L'élément de volume représentatif au sens du rayonnement dégénère alors en un plan (cas d'un problème 1 D) ou une ligne (cas d'un problème 2 D), ce qui permet de générer un champ Θ_w ayant une résolution spatiale égale à celle du champ de température T_w .

Insertion du terme source radiatif dans le bilan d'énergie. Dans le cas O/T considéré ici, il est physiquement le plus pertinent de faire figurer le terme source radiatif dans le bilan de flux à l'interface fluide-solide. Ainsi, le terme source radiatif issu du modèle d'homogénéisation statistique dans le modèle non-homogénéisé des transferts conductifs et convectifs est inséré dans la condition aux limites à l'interface fluide-solide en utilisant la formulation en termes de flux surfacique isotrope équivalent, donnée par l'équation (2.27) :

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla T_f + \varphi_w^R = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla T_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.13)$$

où φ_w^R est le flux radiatif isotrope équivalent.

3.4 Changement d'échelle

L'ensemble des difficultés liées à la compatibilité des modèles ayant été abordé, il est à présent possible de développer la procédure de changement d'échelle par prise de moyenne volumique. L'application des opérateurs de prise de moyenne aux bilans locaux d'énergie aboutit à des bilans macroscopiques homogénéisés exprimés en fonction des champs moyens et des champs de déviation. On les fermera par la suite au moyen de relations linéaires entre les champs de déviation et les champs moyens.

3.4.1 Équations locales de bilan et conditions aux limites

Par souci de simplicité, on supposera que les propriétés thermo-physiques des phases sont uniformes dans le volume de prise de moyenne. La validité de cette approximation est discutée en détails par WHITAKER (1987, 1988). Les bilans locaux d'énergie pour les phases fluide et solide sont, respectivement,

$$(\rho_f c_{pf}) \left(\frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) \quad \text{dans } \mathcal{V}_f^m, \quad (3.14)$$

$$(\rho_s c_{ps}) \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) \quad \text{dans } \mathcal{V}_s^m. \quad (3.15)$$

Ces équations sont également associées à des conditions aux limites à l'interface fluide-solide \mathcal{A}^m :

$$T_f = T_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m, \quad (3.16)$$

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla T_f + \varphi_w^R = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla T_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m. \quad (3.17)$$

On rappelle que φ_w^R dépend fortement, et de façon non linéaire, de la température Θ_w par l'intermédiaire du terme source d'émission.

On aboutit donc à des problèmes différentiels similaires à ceux présentés par QUINTARD et WHITAKER (2000) ; cependant, contrairement à ce qui est fait dans ces travaux antérieurs, on considère que le terme source hétérogène n'est pas uniforme sur le volume de prise de moyenne.

3.4.2 Bilan macroscopique : forme non fermée

Si l'on suppose que les contraintes d'échelles mentionnées à la section 3.2 sont satisfaites, l'application de l'opérateur de prise de moyenne aux équations (3.14) et (3.15) et l'utilisation de la décomposition spatiale des champs



3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

de température conduisent aux bilans macroscopiques non fermés. Pour la phase fluide, on a

$$\begin{aligned} & \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \frac{\partial \langle T_f \rangle^{mf}}{\partial t} + \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + (\rho_f c_{pf}) \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{T}_f \rangle^m \\ &= \Pi_f \nabla \cdot (k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot \left(\frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \tilde{T}_f d\mathcal{A} \right) \\ &+ \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f d\mathcal{A}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

et pour la phase solide, on a

$$\begin{aligned} \Pi_s (\rho_s c_{ps}) \frac{\partial \langle T_s \rangle^{ms}}{\partial t} &= \Pi_s \nabla \cdot (k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + \nabla \cdot \left(\frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \tilde{T}_s d\mathcal{A} \right) \\ &+ \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ces bilans macroscopiques font apparaître les champs moyens $\langle T_f \rangle^{mf}$ et $\langle T_s \rangle^{ms}$ ainsi que les champs de déviation \tilde{T}_f et \tilde{T}_s . Il est nécessaire de fermer ces équations pour y faire apparaître seulement les champs moyens.

3.4.3 Problème aux déviations, fermeture

Problème aux déviations. Le problème aux déviations régit la variation des champs de déviation $\tilde{\Psi}_\gamma$ en fonction des champs moyens $\langle \Psi_\gamma \rangle^{m\gamma}$. Il est obtenu en soustrayant les équations moyennées (3.18) et (3.19) aux équations (3.14) et (3.15) et en utilisant la décomposition spatiale (3.9). Sous l'hypothèse quasi-stationnaire (WHITAKER, 1999), l'équation aux déviations pour la phase fluide prend la forme

$$\begin{aligned} & (\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \tilde{T}_f + (\rho_f c_{pf}) \tilde{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\ &= k_f \nabla^2 \tilde{T}_f - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f d\mathcal{A} \quad \text{dans } \gamma_f^m. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De même, l'équation aux déviations pour la phase solide est

$$0 = k_s \nabla^2 \tilde{T}_s - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s d\mathcal{A} \quad \text{dans } \gamma_s^m. \quad (3.21)$$



3.4. Changement d'échelle

L'usage de la décomposition spatiale (3.9) dans la condition aux limites (3.16) conduit à

$$\tilde{T}_f = \tilde{T}_s + (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) \quad \text{sur } \mathcal{A}^m. \quad (3.22)$$

À ce stade, il est nécessaire d'introduire également une décomposition spatiale du flux radiatif φ_w^R . On l'écrit sous la forme

$$\varphi_w^R = \langle \varphi_w^R \rangle^m + \tilde{\varphi}_w^R. \quad (3.23)$$

La condition aux limites exprimée par l'équation (3.17) devient alors

$$\begin{aligned} & -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \tilde{T}_f + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \tilde{T}_s + \tilde{\varphi}_w^R \\ & = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - \langle \varphi_w^R \rangle^m \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \end{aligned} \quad (3.24)$$

On rappelle que le champ $\tilde{\varphi}_w^R$ est continûment défini sur l'ensemble du volume de prise de moyenne et qu'il est connu avec la même résolution que le champ de température Θ_w qui régit l'émission.

Le champ $\tilde{\varphi}_w^R$ ne peut pas être considéré comme une inconnue du problème aux déviations. Celui-ci serait en effet sous-contraint, car il est impossible d'obtenir une équation donnant $\tilde{\varphi}_w^R$ à partir de la GRTE. On exprime donc $\tilde{\varphi}_w^R$ en fonction du flux radiatif moyen $\langle \varphi_w^R \rangle^m$:

$$\tilde{\varphi}_w^R = \alpha \langle \varphi_w^R \rangle^m. \quad (3.25)$$

Le champ α dépend implicitement du champ de température Θ_w , déterminé à partir des champs de température T_f et T_s . On notera que le traitement nécessaire pour le flux radiatif φ_w^R est à rapprocher de celui proposé dans le cas de problèmes mettant en jeu des réactions hétérogènes (VALDÉS-PARADA, GOYEAU et al., 2006 ; B. D. WOOD et al., 2000). L'introduction de l'équation (3.25) dans la condition aux limites (3.24) conduit à

$$\begin{aligned} & -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \tilde{T}_f + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \tilde{T}_s \\ & = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - (1 + \alpha) \langle \varphi_w^R \rangle^m \quad \text{sur } \mathcal{A}^m. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les équations (3.20), (3.21), (3.22) et (3.26) constituent la forme finale du problème aux déviations.



3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

Fermeture. Suivant la démarche de WHITAKER (1999), on identifie les termes sources macroscopiques dans le problème aux déviations et on propose les relations de fermeture linéaires suivantes :

$$\tilde{T}_f = \mathbf{b}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + \mathbf{b}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} + s_f (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) + r_f \langle \varphi_w^R \rangle^m, \quad (3.27)$$

$$\tilde{T}_s = \mathbf{b}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + \mathbf{b}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - s_s (\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms}) + r_s \langle \varphi_w^R \rangle^m, \quad (3.28)$$

où \mathbf{b}_{ff} , \mathbf{b}_{fs} , s_f et r_f sont les variables de fermeture associées à la phase fluide, et où \mathbf{b}_{sf} , \mathbf{b}_{ss} , s_s et r_s sont celles associées à la phase solide. Cette décomposition est proche de celle proposée par QUINTARD et WHITAKER (2000), à l'exception notable du fait que les champs r_f et r_s sont ici associés à un terme source hétérogène non uniforme.

L'introduction des relations de fermeture (3.27) et (3.28) dans le problème aux déviations permet l'écriture de quatre problèmes de fermeture dont les inconnues sont les champs $\mathbf{b}_{\gamma_1\gamma_2}$, s_γ et r_γ . Les problèmes I, II et III sont identiques à ceux présentés par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) et sont rappelés par souci d'exhaustivité. Le problème IV est proche de celui ajouté par QUINTARD et WHITAKER (2000) ; la présence du champ α constitue cependant une différence fondamentale, qui va modifier de façon significative la méthode de résolution du problème (voir section 3.5).

Problème I

$$\begin{aligned} & (\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{b}_{ff} + (\rho_f c_{pf}) \tilde{\mathbf{v}}_f \\ & = k_f \nabla^2 \mathbf{b}_{ff} - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ff} \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (3.29a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 \mathbf{b}_{sf} - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{sf} \, d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (3.29b)$$

$$\mathbf{b}_{ff} = \mathbf{b}_{sf} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.29c)$$

$$\mathbf{n}_{fs} k_f = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \mathbf{b}_{ff} + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \mathbf{b}_{sf} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.29d)$$

$$\mathbf{b}_{ff}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_{ff}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.29e)$$

$$\mathbf{b}_{sf}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_{sf}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.29f)$$

$$\langle \mathbf{b}_{ff} \rangle^{mf} = \mathbf{0} \quad (3.29g)$$

$$\langle \mathbf{b}_{sf} \rangle^{ms} = \mathbf{0} \quad (3.29h)$$



3.4. Changement d'échelle

Problème II

$$\begin{aligned} & \left(\rho_f c_{p_f} \right) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{b}_{fs} \\ &= k_f \nabla^2 \mathbf{b}_{fs} - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{fs} \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (3.30a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 \mathbf{b}_{ss} - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ss} \, d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (3.30b)$$

$$\mathbf{b}_{fs} = \mathbf{b}_{ss} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.30c)$$

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \mathbf{b}_{fs} + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \mathbf{b}_{ss} = -\mathbf{n}_{fs} k_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.30d)$$

$$\mathbf{b}_{fs}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{b}_{fs}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.30e)$$

$$\mathbf{b}_{ss}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{b}_{ss}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.30f)$$

$$\langle \mathbf{b}_{fs} \rangle^{\text{mf}} = \mathbf{0} \quad (3.30g)$$

$$\langle \mathbf{b}_{ss} \rangle^{\text{ms}} = \mathbf{0} \quad (3.30h)$$

Problème III

$$\begin{aligned} & \left(\rho_f c_{p_f} \right) \mathbf{v}_f \cdot \nabla s_f \\ &= k_f \nabla^2 s_f - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla s_f \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (3.31a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 s_s - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla s_s \, d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (3.31b)$$

$$s_f = s_s + 1 \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.31c)$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla s_f = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla s_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.31d)$$

$$s_f(\mathbf{r} + l_i) = s_f(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.31e)$$

$$s_s(\mathbf{r} + l_i) = s_s(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.31f)$$

$$\langle s_f \rangle^{\text{mf}} = 0 \quad (3.31g)$$

$$\langle s_s \rangle^{\text{ms}} = 0 \quad (3.31h)$$

Problème IV

$$\begin{aligned} & \left(\rho_f c_{p_f} \right) \mathbf{v}_f \cdot \nabla r_f = k_f \nabla^2 r_f \\ & - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_f \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (3.32a)$$

3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

$$0 = k_s \nabla^2 r_s - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_s \, d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (3.32b)$$

$$r_f = r_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.32c)$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla r_f = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla r_s + 1 + \alpha \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (3.32d)$$

$$r_f(\mathbf{r} + l_i) = r_f(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.32e)$$

$$r_s(\mathbf{r} + l_i) = r_s(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (3.32f)$$

$$\langle r_f \rangle^{mf} = 0 \quad (3.32g)$$

$$\langle r_s \rangle^{ms} = 0 \quad (3.32h)$$

La validité des conditions aux limites périodiques (équations (3.29e), (3.29f), etc.) a été discutée par QUINTARD et WHITAKER (1993b, 1994). Celles-ci sont valables pour des cellules élémentaires périodiques ; dans le cas de milieux désordonnés, elles constituent une approximation raisonnable si les contraintes sur les échelles sont respectées.

On remarque que si le champ $\tilde{\varphi}_w^R$ est négligeable devant $\langle \varphi_w^R \rangle^m$, α prend des valeurs négligeables devant 1 et le problème IV dégénère en une forme identique à celle présentée par QUINTARD et WHITAKER (2000).

3.4.4 Bilan macroscopique : forme fermée

L'introduction des relations de fermeture (3.27) et (3.28) dans les équations moyennées non fermées (3.18) et (3.19) permet l'écriture de la forme fermée des équations macroscopiques de bilan. Pour la phase fluide, le bilan d'énergie

3.4. Changement d'échelle

macroscopique prend la forme

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\Pi_f (\rho_f c_{pf}) \frac{\partial \langle T_f \rangle^{mf}}{\partial t}}_{\text{Variation instationnaire}} + \underbrace{\Pi_f (\rho_f c_{pf}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}}_{\text{Convection macroscopique}} \\
 & \underbrace{- \mathbf{u}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}}_{\text{Effets pseudo-convectifs}} \\
 & = \underbrace{\nabla \cdot (\mathbb{k}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbb{k}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms})}_{\text{Conduction-dispersion}} + \underbrace{Ah (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf})}_{\text{Échange entre phases (non-équilibre)}} \\
 & + \underbrace{A \xi_f \langle \varphi_w^R \rangle^m}_{\text{Distribution du terme source radiatif}} + \underbrace{\nabla \cdot (A \mathbf{p}_f \langle \varphi_w^R \rangle^m)}_{\text{Analogue conduction-dispersion}} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

où

$$\mathbb{k}_{ff} = k_f \mathbb{I} + \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \mathbf{b}_{ff} d\mathcal{A} - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \mathbf{b}_{ff} \rangle^m, \quad (3.34)$$

$$\mathbb{k}_{fs} = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \mathbf{b}_{fs} d\mathcal{A} - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \mathbf{b}_{fs} \rangle^m, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{ff} = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ff} d\mathcal{A} - \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} s_f d\mathcal{A} \\
 + (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f s_f \rangle^m, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{fs} = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{fs} d\mathcal{A} + \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} s_f d\mathcal{A} \\
 - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f s_f \rangle^m, \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$Ah = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla s_f d\mathcal{A}, \quad (3.38)$$

$$A \xi_f = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_f d\mathcal{A}, \quad (3.39)$$

$$A \mathbf{p}_f = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} r_f d\mathcal{A} - \rho_f c_{pf} \langle \tilde{\mathbf{v}}_f r_f \rangle^m. \quad (3.40)$$

ξ_f et \mathbf{p}_f (équations (3.39) et (3.40)) sont les propriétés effectives introduites par l'inclusion des transferts radiatifs dans le modèle. Les autres propriétés

3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

effectives ont des expressions identiques à celles proposées par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997). On retrouve dans l'équation (3.33) l'ensemble des termes présentés par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) dans le bilan macroscopique pour la phase fluide, auxquels viennent s'ajouter deux termes au second membre, qui sont liés à la prise en compte du rayonnement dans le modèle.

De même, le bilan macroscopique d'énergie pour la phase solide s'écrit

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\Pi_s (\rho_s c_{ps}) \frac{\partial \langle T_s \rangle^{ms}}{\partial t}}_{\text{Variation instationnaire}} - \underbrace{\mathbf{u}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}}_{\text{Effets pseudo-convectifs}} \\
 &= \underbrace{\nabla \cdot (\mathbb{k}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbb{k}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms})}_{\text{Conduction}} + \underbrace{Ah (\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms})}_{\text{Échange entre phases (non-équilibre)}} \\
 &+ \underbrace{A \xi_s \langle \varphi_w^R \rangle^m}_{\text{Distribution du terme source radiatif}} + \underbrace{\nabla \cdot (A \mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m)}_{\text{Analogue conduction-dispersion}} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{k}_{sf} = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \mathbf{b}_{sf} \, d\mathcal{A}, \quad (3.42)$$

$$\mathbb{k}_{ss} = k_s \mathbb{I} + \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \mathbf{b}_{ss} \, d\mathcal{A}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{u}_{sf} = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{sf} \, d\mathcal{A} - \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} s_s \, d\mathcal{A}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{u}_{ss} = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ss} \, d\mathcal{A} + \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{ss} s_s \, d\mathcal{A}, \quad (3.45)$$

$$A \xi_s = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_s \, d\mathcal{A}, \quad (3.46)$$

$$A \mathbf{p}_s = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} r_s \, d\mathcal{A}. \quad (3.47)$$

On retrouve également dans l'équation (3.41) les termes présents dans le bilan macroscopique de QUINTARD, KAVIANY et al. (1997), les termes supplémentaires dus au rayonnement étant associés à ξ_s et \mathbf{p}_s .

Le quatrième terme présent au second membre des équations (3.33) et (3.41), associé aux coefficients ξ_γ , représente la distribution du flux radiatif



3.5. Méthode de résolution

interfacial moyen $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ entre les deux phases. Ces coefficients sont analogues aux coefficients de distribution introduits par QUINTARD et WHITAKER (2000), avec, toutefois, une différence notoire : la somme $\xi_f + \xi_s$ n'est pas égale à 1 en raison de la présence du champ α dans la condition aux limites (3.26). En effet, on a

$$\begin{aligned} A(\xi_f + \xi_s) &= \frac{1}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla (r_f - r_s) \, d\mathcal{A} \\ &= \frac{1}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} 1 + \alpha \, d\mathcal{A} \\ &= A + \frac{1}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \alpha \, d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

L'intégrale $\int_{\mathcal{A}^m} \alpha \, d\mathcal{A}$ n'est nulle que si α est symétrique sur le volume de prise de moyenne.

Le cinquième terme du second membre des équations (3.33) et (3.41), associé aux vecteurs \mathbf{p}_γ , est une contribution due aux hétérogénéités macroscopiques du champ $\langle \varphi_w^R \rangle^m$. Les expressions des vecteurs \mathbf{p}_γ sont semblables à celles des tenseurs de conductivité $\mathbb{k}_{\gamma_1 \gamma_2}$, et elles comportent des contributions liées à la dispersion et à la tortuosité. Bien que l'interprétation de ces termes comme des effets macroscopiques de diffusion ne soit pas immédiate, on peut toutefois les rapprocher des termes de conduction-dispersion.

3.5 Méthode de résolution

La méthode de résolution du problème macroscopique constitue un point original du modèle. Elle passe théoriquement par un couplage multi-échelles, car la solution du problème de fermeture IV dépend des champs macroscopiques via le champ α : celui-ci est donné par le flux radiatif φ_w^R , qui est lui-même obtenu à partir du champ de température de paroi T_w obtenu à partir des champs de température de la phase fluide ou solide grâce à la condition à la limite de continuité (3.16).

3.5.1 Champ de température

Une approximation du champ de température peut être obtenue en utilisant la décomposition spatiale (3.9). Le champ moyen provient de la solution du





3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

problème macroscopique, tandis que le champ de déviation doit être modélisé. Un premier effort dans la modélisation des déviations sans intervention d'une fermeture a été fait par ANGELI et al. (2013). On dispose, ici, d'un modèle pour les déviations au travers des relations de fermeture (3.27) et (3.28).

Il est important de noter que la décomposition est évaluée en un point \mathbf{r} du volume du milieu poreux :

$$T_Y(\mathbf{r}) = \langle T_Y \rangle^{\text{mY}}(\mathbf{r}) + \tilde{T}_Y(\mathbf{r}). \quad (3.49)$$

Les développements sur la prise de moyenne volumique conduisent à considérer dans certains points de la démarche que l'écart de la moyenne en \mathbf{r} à celle au centre \mathbf{x} du volume de prise de moyenne est négligeable (WHITAKER, 1999). On écrit donc

$$\langle T_Y \rangle^{\text{mY}}(\mathbf{r}) \simeq \langle T_Y \rangle^{\text{mY}}(\mathbf{x}). \quad (3.50)$$

Cette approximation ne doit pas être utilisée lors de la construction d'une approximation du champ de température dans le volume de prise de moyenne. Il faut donc également modéliser les variations de $\langle T_Y \rangle^{\text{Ry}}(\mathbf{r})$ au sein de \mathcal{V}^{m} , par exemple par extrapolation linéaire grâce à la valeur de $\nabla \langle T_Y \rangle^{\text{mY}}(\mathbf{x})$, ou bien par interpolation entre les valeurs de $\langle T_Y \rangle^{\text{mY}}$ solutions du problème macroscopique.

3.5.2 Séquence de résolution du problème de fermeture IV

Une fois une approximation du champ T_w obtenue, il est possible de résoudre le problème de fermeture IV. Le problème couplé est résolu en appliquant la séquence suivante (voir figure 3.4) :

1. On résout les problèmes de fermeture I, II et III.
2. On résout une première fois le problème IV afin d'initialiser sa solution. Cette étape étant effectuée avec $\alpha = 0$, la solution ne dépend pas de la solution du problème macroscopique. On se trouve dans la configuration présentée par QUINTARD et WHITAKER (2000).
3. On détermine les propriétés effectives à partir des solutions des problèmes de fermeture I à IV.
4. Le problème de transport macroscopique (équations (3.33) et (3.41)) est résolu et les champs de température macroscopiques sont déterminés.



3.5. Méthode de résolution

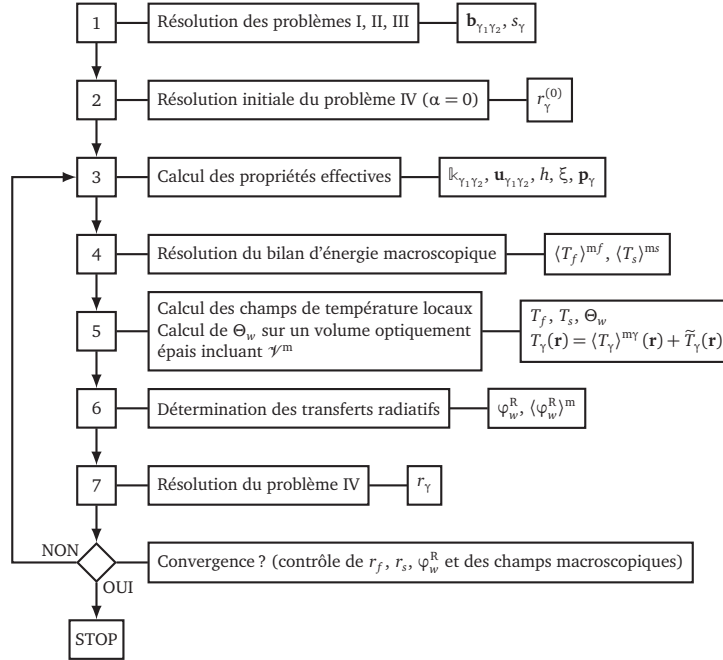


FIGURE 3.4: Logigramme de la séquence de résolution.

5. Les champs de température locaux $T_f(\mathbf{r})$ et $T_s(\mathbf{r})$ sont déterminés dans un volume $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, centré en \mathbf{x} (voir sous-section 3.5.1). $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ doit être optiquement épais et peut être plus grand que le volume de prise de moyenne $\mathcal{V}^m(\mathbf{x})$. Θ_w est ensuite déterminé sur le volume $\mathcal{V}(\mathbf{x})$.
6. On détermine ensuite les transferts radiatifs en utilisant la méthode appropriée (GRTE sous sa forme générale ou dégénérée, loi de Fourier radiative). On obtient ensuite le champ φ_w^R , sa moyenne $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ et champ α .
7. On résout le problème IV avec les nouvelles valeurs obtenues pour le champ α .

Les étapes 4 à 7 sont répétées jusqu'à la convergence des champs r_f , r_s , φ_w^m et des champs macroscopiques.

Bien que la résolution repose sur un couplage multi-échelles, on remarque que les valeurs des propriétés effectives exprimées en fonction de la solution

3. MÉTHODE DE CHANGEMENT D'ÉCHELLE COUPLÉ

du problème IV ainsi que le flux radiatif moyen ne dépendent que des termes sources macroscopiques. Il peut donc être avantageux en termes de coûts en calcul de tabuler les propriétés effectives et le flux radiatif moyen en fonction des termes sources macroscopiques plutôt que de procéder à une résolution couplant les échelles.

3.6 Cas d'une phase semi-transparente

La méthode présentée ici a été limitée au cas d'une phase fluide transparente et d'une phase solide opaque. Les cas ST/ST et ST/T ont également été traités (voir annexe A). La démarche conduisant au modèle couplé est très proche de celle développée dans ce chapitre. Les termes sources radiatifs sont insérés dans le volume de la phase semi-transparente (émissive et absorbante) plutôt qu'à l'interface fluide-solide. Les températures caractéristiques de l'émission Θ_γ sont définies au moyen d'une moyenne de volume plutôt qu'une moyenne de surface. Enfin, le cas ST/ST présente un total de cinq problèmes de fermeture. Mais ces différences ne remettent pas en cause la démarche établissant la validité du couplage (compatibilité des échelles, présentée à la section 3.2).

3.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté une procédure de changement d'échelle prenant en compte le couplage entre les transferts conductifs, convectifs et radiatifs. La difficulté principale à la mise en place d'un tel modèle réside dans le fait qu'il est impossible, à l'échelle locale, de résoudre avec la même méthode les bilans d'énergie pour la matière et pour le champ de rayonnement. De ceci découlent toutes les difficultés rencontrées, pour lesquelles des solutions ont été proposées.

La construction d'un modèle couplé associant un bilan d'énergie non-homogénéisé et un modèle de transferts radiatifs homogénéisé a été proposée, et la méthode de prise de moyenne volumique lui a été appliquée. Certains des problèmes de fermeture associés à ce modèle nécessitent une résolution itérative car ils dépendent des termes sources macroscopiques.

Les équations macroscopiques incluent des propriétés effectives proches de celles rencontrées dans un cas ne faisant pas état des hétérogénéités locales des termes sources radiatifs. Elles incluent également des propriétés effectives associées à des termes liés aux hétérogénéités macroscopiques du champ de



3.7. Conclusion

puissance radiative, que l'on peut rapprocher des termes de diffusion-dispersion. Ces termes sont probablement négligeables dans beaucoup des cas couverts par ce modèle.





Chapitre 4

Résolution d'un problème macroscopique de transferts couplés

LE MODÈLE de transferts couplés développé au chapitre 3 couvre une large variété de cas. La résolution de la GRTE augmente fortement le coût en calcul d'un calcul couplé complet mais il est possible, en faisant des approximations, de faire dégénérer le modèle pour aboutir à une forme plus simple.

Dans ce chapitre, on se propose d'élaborer un modèle de transferts thermiques à deux températures dans les milieux poreux prenant en compte le couplage des transferts conductifs, convectifs et radiatifs pour résoudre un problème macroscopique relativement simple qui présente néanmoins des particularités intéressantes. On détermine ensuite le domaine de validité du modèle construit.

4.1 Définition du problème

On considère le problème unidimensionnel de la mise en contact d'un solide poreux chaud et d'un gaz froid en écoulement. La phase solide est opaque, et la phase fluide est transparente. On considère une loi de réflexion diffuse aux interfaces fluide-solide avec une absorptivité grise $\alpha_w = 0,66$. À haute température, la conductivité des gaz peut atteindre des valeurs relativement élevées (de l'ordre de $0,2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour de l'air à 2500 K (TAINE, IACONA et

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

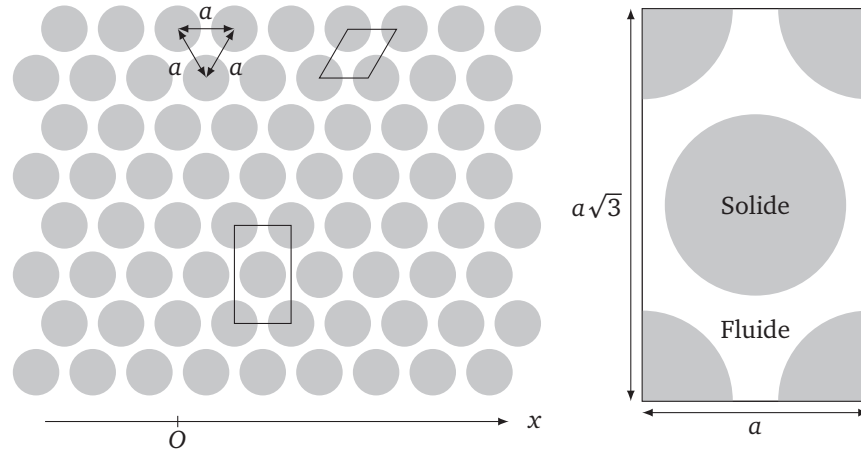


FIGURE 4.1: Grappe de cylindres (agencement équilatéral) ; cellule élémentaire.

PETIT, 2008)). La conductivité de certaines céramiques peut atteindre des valeurs relativement basses (de l'ordre de $0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour un alliage de silice, d'alumine (5 %) et d'oxyde de fer Fe_2O_3 à 1200 K (LAURENT et VUILLERMOZ, 2012)). On supposera qu'on a

$$k_s \geq k_f. \quad (4.1)$$

La phase fluide est supposée incompressible et gazeuse. Sa conductivité, sa masse volumique et sa capacité thermique massique sont supposées de l'ordre de celles de l'air. La phase solide est constituée de cylindres disposés selon un agencement triangulaire équilatéral de paramètre a , par la suite simplement désigné par le terme *équilatéral* (voir figure 4.1). Le milieu est donc ordonné, non-consolidé, défini analytiquement et statistiquement uniforme.

Le problème de transfert macroscopique est stationnaire et unidimensionnel. Il est strictement invariant dans la direction de l'axe des cylindres. On simule les transferts dans un plan transverse aux cylindres (voir figure 4.1). On utilisera l'homogénéisation statistique pour modéliser les transferts radiatifs et la prise de moyenne volumique pour réaliser le changement d'échelle pour les autres modes de transfert.

Le problème étudié modélise l'injection d'un fluide dans un solide poreux à

4.1. Définition du problème

plus haute température à l'abscisse $x = 0$:

$$\langle T_f \rangle^{mf}(x = 0) = T_{f0}, \quad (4.2)$$

$$\langle T_s \rangle^{ms}(x = 0) = T_{s0}. \quad (4.3)$$

On observe alors l'évolution des champs de température dans chacune des phases sur une distance suffisamment grande pour que les deux phases soient mises en équilibre thermique. La variation de la température en fonction de la coordonnée spatiale est alors nulle :

$$\frac{d\langle T_f \rangle^{mf}}{dx}(x \rightarrow \infty) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx}(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.5)$$

On utilisera un modèle de transferts thermiques à deux températures.

Le non-équilibre thermique local provient ici des conditions aux limites, contrairement au cas présenté par (QUINTARD et WHITAKER, 1995), où il provient des conditions initiales.

Relations géométriques. Le rayon R des cylindres peut être exprimé en fonction de l'espacement a entre les axes de deux cylindres adjacents et de la porosité :

$$R = a \sqrt{(1 - \Pi_f) \frac{\sqrt{3}}{2\pi}}. \quad (4.6)$$

L'aire interfaciale par unité de volume du milieu vaut (BELLET et al., 2009)

$$A = \frac{2(1 - \Pi_f)}{R} = 2 \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \Pi_f} \frac{1}{a}. \quad (4.7)$$

Le coefficient d'extinction à la limite d'un milieu optiquement mince β^{ot} est donné par (BELLET et al., 2009)

$$\beta^{ot} = \frac{A}{\pi \Pi_f} = \frac{2(1 - \Pi_f)}{\pi \Pi_f R}. \quad (4.8)$$

La maille élémentaire du réseau constituant le milieu contient un seul cylindre ; elle a la forme d'un parallélogramme. Elle est représentée sur la figure 4.1. Pour des raisons de simplicité, on préférera opter pour une maille rectangulaire ; celle-ci doit alors comporter deux cylindres pour qu'il soit possible de reconstituer le milieu (voir figure 4.1).



4. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

4.2 Modèle de transferts

Afin de résoudre le problème, on construit un modèle fondé sur les mêmes principes que celui présenté dans le chapitre 3. On modélise donc les interactions entre les deux phases en présence, l'effet du rayonnement étant représenté par la condition aux limites de continuité du flux.

4.2.1 Modèle de transfert à l'échelle locale

Bilans de quantité de mouvement et de masse. L'écoulement dans la phase fluide est régi par l'équation de Stokes (sans terme de gravité) : il n'y a pas d'effets inertiels. Le problème dynamique s'écrit donc

$$\mathbf{0} = -\nabla p_f + \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}_f \quad \text{dans la phase fluide,} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{0} \quad \text{à l'interface fluide-solide,} \quad (4.10)$$

où p_f , μ_f et \mathbf{v}_f sont respectivement la pression, la viscosité dynamique et la vitesse du fluide. Le bilan de masse s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0 \quad \text{dans la phase fluide.} \quad (4.11)$$

Le problème étant unidimensionnel à l'échelle macroscopique, le champ de vitesse homogénéisé est orienté selon l'axe x :

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} = \langle v_f \rangle^{mf} \mathbf{e}_x \quad (4.12)$$

où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire associé à l'axe x .

Bilan d'énergie. Le bilan d'énergie prend une forme proche de celle proposée dans la section 3.4.1 :

$$(\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) \quad \text{dans la phase fluide,} \quad (4.13)$$

$$0 = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) \quad \text{dans la phase solide,} \quad (4.14)$$

en conservant les notations du chapitre 3. À ces équations locales en régime stationnaire doivent s'ajouter des conditions aux limites. On a continuité de la température à l'interface fluide-solide :

$$T_f = T_s \quad \text{à l'interface fluide-solide.} \quad (4.15)$$

On a également la condition aux limites de continuité du flux :

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla T_f + \varphi_w^R = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla T_s \quad \text{à l'interface fluide-solide.} \quad (4.16)$$



4.2.2 Modèle de transfert à l'échelle macroscopique

On utilise la méthode de la prise de moyenne volumique pour écrire un modèle macroscopique de transferts à partir du problème à l'échelle locale. Le volume de prise de moyenne \mathcal{V}^m est représenté sur la figure 4.1.

Bilans de quantité de mouvement et de masse. L'application de la méthode de la prise de moyenne volumique aux bilans de quantité de mouvement et de masse présentés à la sous-section 4.2.1 est classique. Une étude détaillée est présentée par WHITAKER (1986, 1999). Le bilan macroscopique de masse est donné par l'équation

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} = 0, \quad (4.17)$$

ce qui implique que la vitesse est uniforme. La prise de moyenne appliquée au bilan de quantité de mouvement aboutit à l'équation de Darcy :

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle^m = -\frac{\mathbb{K}_f}{\mu_f} \cdot \nabla \langle p_f \rangle^{mf}, \quad (4.18)$$

où $\langle \mathbf{v}_f \rangle^m$ est la vitesse superficielle, \mathbb{K}_f la perméabilité du milieu, μ_f la viscosité dynamique du fluide et $\langle p_f \rangle^{mf}$ la pression intrinsèque dans la phase fluide. On néglige ici la correction de Brinkman. La valeur de la vitesse est donc complètement déterminée par le gradient de pression, qui est uniforme en raison de la simplicité de la géométrie (unidimensionnelle) et de l'incompressibilité du fluide. Cela revient concrètement à imposer arbitrairement la valeur de la vitesse en tout point. La simulation du problème macroscopique ne nécessite donc pas de déterminer la perméabilité du milieu.

Bilan d'énergie. En première approximation, on supposera que le flux radiatif varie peu sur le volume de prise de moyenne \mathcal{V}^m , c.-à-d. que les déviations du champ φ_w^R sont négligeables. Ainsi, on a

$$\varphi_w^R = \langle \varphi_w^R \rangle^m \quad \text{sur } \mathcal{V}^m. \quad (4.19)$$

Le champ α introduit dans le chapitre 3 est donc nul. On est ainsi ramené à un cas très similaire à celui présenté par QUINTARD et WHITAKER (2000), et qui correspond à l'étape d'initialisation de la solution du problème macroscopique dans la séquence présentée à la sous-section 3.5.2.



4. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

La procédure de prise de moyenne volumique est similaire à celle appliquée à la section 3.4.2. On obtient un modèle à deux équations. Pour la phase fluide, on a

$$\begin{aligned} & \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{k}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbf{k}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + Ah (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) \\ & \quad + A\xi \langle \varphi_w^R \rangle^m + \nabla \cdot (A\mathbf{p}_f \langle \varphi_w^R \rangle^m), \end{aligned} \quad (4.20)$$

et pour la phase solide, on a

$$\begin{aligned} & -\mathbf{u}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{k}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbf{k}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + Ah (\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms}) \\ & \quad + A(1 - \xi) \langle \varphi_w^R \rangle^m + \nabla \cdot (A\mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m). \end{aligned} \quad (4.21)$$

On a posé $\xi_f = \xi$. La nullité du champ α permet d'écrire $\xi_s = 1 - \xi$. Le coefficient de distribution ξ détermine la répartition du flux radiatif entre les deux phases.

Calcul du flux radiatif. Le calcul de $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ doit être effectué au moyen de la procédure itérative présentée à la sous-section 3.5.2, ce qui entraîne une augmentation considérable du volume de calcul nécessaire pour résoudre les transferts à l'échelle macroscopique. En première approximation, on utilisera le flux radiatif moyen donné par la loi de Fourier radiative macroscopique

$$A\varphi_w^{R,Fo} = \nabla \cdot (\mathbf{k}_w^R (\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m}) \nabla \langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m}) \quad (4.22)$$

où $\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m}$ est la température de paroi homogénéisée, définie par

$$\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m} = \frac{1}{\mathcal{A}^m} \int_{\mathcal{A}^m} T_s \, d\mathcal{A}. \quad (4.23)$$

Il faut que les critères de validité de la loi de Fourier radiative (voir sous-section 2.3.2) soient satisfaits. On supposera en particulier que le point d'abscisse $x = 0$ se trouve à une distance supérieure à l_b^R d'une interface avec un autre milieu.

En effectuant cette approximation, on commet une erreur sur le flux radiatif macroscopique égale à

$$\delta \langle \varphi_w^R \rangle^m = \langle \varphi_w^R \rangle^m - \varphi_w^{R,Fo}. \quad (4.24)$$

Quantifier cette erreur nécessite un calcul de référence passant par l'utilisation de la GRTE.



4.3. Caractérisation du milieu

Température de paroi. La valeur de la température de paroi $\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m}$ est utilisée pour déterminer le terme source radiatif. Le nombre de Biot est donné par

$$\text{Bi} = \frac{k_f}{k_s} \frac{(Ah)^+}{4} \quad (4.25)$$

où

$$(Ah)^+ = \frac{A h a^2}{k_f} \quad (4.26)$$

est le coefficient d'échange adimensionné. Les valeurs de $(Ah)^+$ sont données dans la section 4.3.2. Lorsque Bi est petit devant 1, on peut considérer que les gradients de température dans un cylindre sont négligeables : la température de la paroi $\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m}$ est alors proche de la température moyenne de la phase solide $\langle T_s \rangle^{\text{ms}}$. On obtient, en utilisant les valeurs de $(Ah)^+$ présentées plus bas :

$$\text{Bi} = \begin{cases} 3 & \text{pour } k_s/k_f = 1 \\ 0,5 & \text{pour } k_s/k_f = 10 \\ 0,01 & \text{pour } k_s/k_f = 100 \end{cases} \quad (4.27)$$

On considérera en première approximation que l'on a $\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m} = \langle T_s \rangle^{\text{ms}}$. Les valeurs données par l'équation (4.27) indiquent que cette approximation est valable pour $k_s/k_f = 100$. Pour $k_s/k_f = 10$, cette hypothèse est contestable. Pour $k_s/k_f = 1$, cette approximation est grossière. Dans les cas où $\text{Bi} \geq 0,1$, une estimation plus précise de la température de paroi est nécessaire.

4.3 Caractérisation du milieu

Cette section présente les résultats de la caractérisation du milieu poreux considéré. On détermine la conductivité radiative ainsi que l'ensemble des propriétés effectives de transport apparaissant dans les bilans macroscopiques présentés plus haut.

4.3.1 Propriétés radiatives du milieu

Isotropie statistique. Les agencements considérés sont statistiquement anisotropes aux échelles de longueur nécessitant l'usage de la GRTE sous sa forme exacte ou dégénérée en ETR classique. Toutefois, BELLET et al. (2009) établissent que le tenseur de conductivité radiative dans le plan transverse est



4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

isotrope pour des raisons de symétrie. Le flux radiatif résultant est donc isotrope, à condition que la loi de Fourier radiative soit valable à l'échelle de longueur considérée.

Conductivité radiative. La conductivité radiative du milieu est donnée par (TAINE, BELLET et al., 2010)

$$\begin{aligned} k_w^R(\Theta_w, \Pi_f, A, \alpha_{w,v}^h) &= \frac{\pi \Pi_f^2}{A} \int_0^\infty \frac{dI_v^\circ}{dT}(\Theta_w) k^{R+}(\Pi_f, \alpha_{w,v}^h) dv \\ &= \frac{2 \Pi_f^2}{\sqrt{1 - \Pi_f}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/2} \sigma a \Theta_w^3 k^{R+}(\Pi_f, \alpha_w), \end{aligned} \quad (4.28)$$

où σ est la constante de Stefan et k^{R+} est la conductivité radiative adimensionnée tabulée par TAINE, BELLET et al. (2010). On a donc

$$k_w^R = C_{k_w^R} \sigma a \Theta_w^3 \quad (4.29)$$

avec $C_{k_w^R} = \frac{2 \Pi_f^2}{\sqrt{1 - \Pi_f}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/2} k^{R+}$. La conductivité radiative est également proportionnelle à l'espacement a entre les centres des cylindres. La table 4.1 montre que la conductivité radiative augmente fortement en fonction de la porosité, pour une valeur de a donnée.

Validité de la loi de Fourier radiative. Si on note $B_w^+ = B_w / \beta^{\text{ot}}$ le coefficient d'extinction adimensionné dans le plan transverse, on peut exprimer l'épaisseur optique δ d'une colonne d'épaisseur l par

$$\begin{aligned} \delta = B_w l &= \frac{2}{\pi} B_w^+(\Pi_f, \varphi) \frac{1 - \Pi_f}{\Pi_f} \frac{l}{R} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} B_w^+(\Pi_f, \varphi) \frac{\sqrt{1 - \Pi_f}}{\Pi_f} \frac{l}{a}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

B_w dépend fortement de l'angle polaire φ dans le plan transverse (BELLET et al., 2009 ; TAINE, BELLET et al., 2010) : l'épaisseur optique correspondant à une longueur l donnée est donc différente selon l'angle considéré. On remarque qu'aux hautes porosités se forment des « allées » dans les directions desquelles l'extinction devient faible et se fait sur des distances très grandes devant



4.3. Caractérisation du milieu

TABLE 4.1: Valeur de la constante $C_{k_w^R} = \frac{2\Pi_f^2}{\sqrt{1-\Pi_f}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^{1/2} k^{R+}$ pour le calcul de la conductivité radiative dans le cas de cylindres disposés selon un agencement équilatéral. Valeurs données pour $\alpha_w = 0,66$.

Π_f	$C_{k_w^R}$	Π_f	$C_{k_w^R}$
0,150	$5,40 \times 10^{-1}$	0,600	$3,12 \times 10^1$
0,215	$5,76 \times 10^{-1}$	0,650	$5,09 \times 10^1$
0,300	$6,86 \times 10^{-1}$	0,700	$7,80 \times 10^1$
0,376	1,17	0,750	$1,15 \times 10^2$
0,410	2,00	0,800	$1,65 \times 10^2$
0,446	3,77	0,850	$2,32 \times 10^2$
0,513	$1,09 \times 10^1$	0,900	$3,29 \times 10^2$
0,563	$2,06 \times 10^1$		

l'espacement inter-axes a . Ces allées disparaissent aux petites porosités, ce qui diminue légèrement l'anisotropie de l'extinction dans ces configurations. On notera que la présence de ces allées optiques n'est problématique que lors de la caractérisation du milieu ; elle ne l'est pas dans le calcul des transferts radiatifs.

On définit un coefficient d'extinction généralisé global $B_w^{\text{glob}}(\Pi_f)$ associé à la fonction de distribution cumulée d'extinction globale $G_w^{\text{ext, glob}}$ (BELLET et al., 2009). Celle-ci est déterminée sans distinction de direction : l'algorithme conduisant à sa détermination est similaire à celui utilisé dans le cas de milieux isotropes (voir section 2.1.2). La figure 4.2 donne les valeurs de $B_w^{\text{glob}+}$ pour des porosités allant de 0,15 à 0,90.

L'hypothèse d'une loi de réflexion diffuse ayant été faite, l'expression du coefficient d'absorption global est donnée par

$$K_w^{\text{glob}} = \alpha_w B_w^{\text{glob}}. \quad (4.31)$$

Le coefficient d'absorption effectif K_w^{eff} est donné par (GOMART et TAINE, 2011)

$$K_w^{\text{eff}} = K_w^{\text{glob}} C_{K_w^{\text{eff}}}(\omega_w, g_w) = \alpha_w B_w^{\text{glob}+}(\omega_w, g_w) \beta^{\text{ot}}, \quad (4.32)$$

où $\omega_w = \Sigma_w^{\text{glob}}/B_w^{\text{glob}} = 1 - \alpha_w$ est l'albédo du milieu et g_w le paramètre d'asymétrie de la diffusion. La valeur de g_w est indisponible dans la littérature. La géométrie du milieu le rendant rétro-diffusant, on opte arbitrairement pour une valeur de l'ordre de $-0,2$. On examinera également les valeurs

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

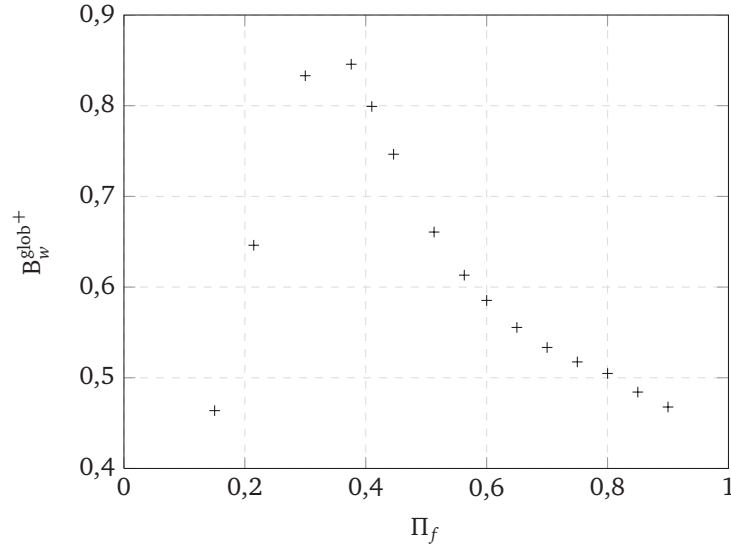


FIGURE 4.2: Coefficient d'extinction global adimensionné en fonction de la porosité pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,15$ à $0,90$). Données reproduites avec l'aimable autorisation de Fabien BELLET, qui a effectué la caractérisation radiative de ces milieux (TAINÉ, BELLET et al., 2010).

des différentes propriétés radiatives pour $g_w = -0,9$, valeur cependant peu probable. On a (GOMART et TAINÉ, 2011)

$$C_{K_w^{\text{eff}}}(\omega_w, g_w) = \begin{cases} 2,17 & \text{si } g_w = -0,2 \\ 2,31 & \text{si } g_w = -0,9 \end{cases} \quad (4.33)$$

En utilisant l'expression (4.32) et les relations géométriques, le critère donné par l'équation (2.37) devient

$$\frac{1}{\Theta_w} \frac{d\Theta_w}{dx} < \underbrace{\eta \alpha_w B_w^{\text{glob}+} C_{K_w^{\text{eff}}}(\omega_w, g_w)}_{K_w^{\text{eff}}} \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{1-\Pi_f}}{\Pi_f} \frac{1}{a}. \quad (4.34)$$

Quelques valeurs de η sont données dans l'équation (2.38). La table 4.2 donne la valeur de $a K_w^{\text{eff}}$ en fonction de Π_f et g_w .

4.3. Caractérisation du milieu

TABLE 4.2: Valeurs de $a K_w^{\text{eff}}$ et l_b^R/a en fonction de Π_f et g_w pour des cylindres en agencement équilatéral pour $\alpha_w = 0,66$.

		$a K_w^{\text{eff}}$		l_b^R/a	
g_w		-0,9	-0,2	-0,9	-0,2
Π_f	0,1500	5,270	4,950	0,949	1,010
	0,2147	4,930	4,631	1,014	1,080
	0,3000	4,295	4,035	1,164	1,239
	0,3760	3,285	3,086	1,522	1,620
	0,4100	2,768	2,600	1,806	1,923
	0,4460	2,303	2,163	2,171	2,311
	0,5130	1,661	1,561	3,009	3,204
	0,5630	1,331	1,250	3,757	3,999
	0,6000	1,140	1,071	4,384	4,667
	0,6500	0,935	0,878	5,350	5,695
	0,7000	0,772	0,725	6,480	6,898
	0,7500	0,638	0,599	7,840	8,346
	0,8000	0,522	0,490	9,586	10,204
	0,8500	0,408	0,383	12,258	13,049
	0,9000	0,304	0,285	16,456	17,518

Pour $\Pi_f = 0,80$, $g_w = -0,2$ et une précision relative de 5 % ($\eta = 0,072$) sur la loi de Fourier radiative, on obtient donc

$$\frac{d\Theta_w}{\Theta_w} < 3,53 \times 10^{-2} \frac{dx}{a}. \quad (4.35)$$

La variation relative de Θ_w ne doit donc pas, dans ce cas, excéder 0,035 sur une distance de l'ordre de la largeur a d'une cellule élémentaire.

Il faut également que la frontière entre le milieu poreux et un autre milieu soit située à une distance supérieure à $l_b^R = 5/K_Y^{\text{eff}}$. La table 4.2 donne la valeur de l_b^R/a en fonction de Π_f et g_w .

4.3.2 Propriétés effectives de transport

Les propriétés effectives présentes dans les équations macroscopiques de transport (4.20) et (4.21) peuvent être déterminées en résolvant les problèmes de fermeture présentés par QUINTARD et WHITAKER (2000). On utilise pour cela



4. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

l'outil de simulation COMSOL Multiphysics. L'annexe B présente les méthodes numériques utilisées ainsi que des calculs de validation de l'outil numérique pour le cas traité. La géométrie utilisée est représentée sur la figure 4.1.

Problèmes résolus. On résout ici les problèmes de fermeture présentés par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) et QUINTARD et WHITAKER (2000) afin de déterminer les propriétés effectives de transport apparaissant dans le modèle de transferts macroscopiques. Il s'agit d'une forme dégénérée des problèmes de fermeture mentionnés au chapitre 3 avec $\alpha = 0$. L'écoulement, représenté au moyen du modèle de Stokes, n'est pas influencé par le bilan d'énergie. On rappelle ici l'ensemble des équations composant les différents problèmes de fermeture ainsi que les expressions des propriétés effectives de transport associées.

Problème I

$$\begin{aligned} (\rho_f c_{p_f}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{b}_{ff} + (\rho_f c_{p_f}) \tilde{\mathbf{v}}_f \\ = k_f \nabla^2 \mathbf{b}_{ff} - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ff} d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (4.36a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 \mathbf{b}_{sf} - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{sf} d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (4.36b)$$

$$\mathbf{b}_{ff} = \mathbf{b}_{sf} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.36c)$$

$$\mathbf{n}_{fs} k_f = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \mathbf{b}_{ff} + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \mathbf{b}_{sf} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.36d)$$

$$\mathbf{b}_{ff}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{b}_{ff}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.36e)$$

$$\mathbf{b}_{sf}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{b}_{sf}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.36f)$$

$$\langle \mathbf{b}_{ff} \rangle^{mf} = \mathbf{0} \quad (4.36g)$$

$$\langle \mathbf{b}_{sf} \rangle^{ms} = \mathbf{0} \quad (4.36h)$$

Problème II

$$\begin{aligned} (\rho_f c_{p_f}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \mathbf{b}_{fs} \\ = k_f \nabla^2 \mathbf{b}_{fs} - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{fs} d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (4.37a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 \mathbf{b}_{ss} - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ss} d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (4.37b)$$



4.3. Caractérisation du milieu

$$\mathbf{b}_{fs} = \mathbf{b}_{ss} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.37c)$$

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \mathbf{b}_{fs} + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \mathbf{b}_{ss} = -\mathbf{n}_{fs} k_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.37d)$$

$$\mathbf{b}_{fs}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{b}_{fs}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.37e)$$

$$\mathbf{b}_{ss}(\mathbf{r} + l_i) = \mathbf{b}_{ss}(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.37f)$$

$$\langle \mathbf{b}_{fs} \rangle^{mf} = \mathbf{0} \quad (4.37g)$$

$$\langle \mathbf{b}_{ss} \rangle^{ms} = \mathbf{0} \quad (4.37h)$$

Problème III

$$\begin{aligned} & \left(\rho_f c_{pf} \right) \mathbf{v}_f \cdot \nabla s_f \\ & = k_f \nabla^2 s_f - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla s_f \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (4.38a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 s_s - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla s_s \, d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (4.38b)$$

$$s_f = s_s + 1 \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.38c)$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla s_f = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla s_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.38d)$$

$$s_f(\mathbf{r} + l_i) = s_f(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.38e)$$

$$s_s(\mathbf{r} + l_i) = s_s(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.38f)$$

$$\langle s_f \rangle^{mf} = 0 \quad (4.38g)$$

$$\langle s_s \rangle^{ms} = 0 \quad (4.38h)$$

Problème IV

$$\begin{aligned} & \left(\rho_f c_{pf} \right) \mathbf{v}_f \cdot \nabla r_f \\ & = k_f \nabla^2 r_f - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_f \, d\mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{sur } \mathcal{V}_f^m \quad (4.39a)$$

$$0 = k_s \nabla^2 r_s - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_s \, d\mathcal{A} \quad \text{sur } \mathcal{V}_s^m \quad (4.39b)$$

$$r_f = r_s \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.39c)$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla r_f = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla r_s + 1 + \alpha \quad \text{sur } \mathcal{A}^m \quad (4.39d)$$

$$r_f(\mathbf{r} + l_i) = r_f(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.39e)$$

$$r_s(\mathbf{r} + l_i) = r_s(\mathbf{r}) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.39f)$$

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

$$\langle r_f \rangle^{mf} = 0 \quad (4.39g)$$

$$\langle r_s \rangle^{ms} = 0 \quad (4.39h)$$

La présence de termes intégraux dans les différentes équations complique la résolution de ces problèmes, et on cherchera plutôt à résoudre les formulations alternatives présentées par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) et QUINTARD et WHITAKER (2000). La démarche conduisant à l'établissement de ces problèmes alternatifs est exposé en détails par QUINTARD et WHITAKER (1993a). La solution des problèmes de fermeture I, II, III et IV permet de calculer les propriétés effectives dont on rappelle les expressions :

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_{ff} &= k_f \mathbb{I} + \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \mathbf{b}_{ff} \, d\mathcal{A} - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \mathbf{b}_{ff} \rangle^m \\ \mathbb{k}_{fs} &= \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \mathbf{b}_{fs} \, d\mathcal{A} - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \mathbf{b}_{fs} \rangle^m \\ \mathbb{k}_{sf} &= \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \mathbf{b}_{sf} \, d\mathcal{A} \\ \mathbb{k}_{ss} &= k_s \mathbb{I} + \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \mathbf{b}_{ss} \, d\mathcal{A} \\ \mathbf{u}_{ff} &= \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ff} \, d\mathcal{A} - \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} s_f \, d\mathcal{A} \\ &\quad + (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f s_f \rangle^m \\ \mathbf{u}_{fs} &= \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \mathbf{b}_{fs} \, d\mathcal{A} + \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} s_f \, d\mathcal{A} \\ &\quad - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f s_f \rangle^m \\ \mathbf{u}_{sf} &= \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{sf} \, d\mathcal{A} - \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} s_s \, d\mathcal{A} \\ \mathbf{u}_{ss} &= \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \mathbf{b}_{ss} \, d\mathcal{A} + \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{ss} s_s \, d\mathcal{A} \\ Ah &= \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla s_f \, d\mathcal{A} \\ A\xi = A\xi_f &= \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_f \, d\mathcal{A} \end{aligned}$$

4.3. Caractérisation du milieu

$$A\mathbf{p}_f = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} r_f \, d\mathcal{A} - \rho_f c_{pf} \langle \tilde{\mathbf{v}}_f r_f \rangle^m$$

$$A\mathbf{p}_s = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} r_s \, d\mathcal{A}$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité du deuxième ordre. La résolution des problèmes de fermeture est effectuée en utilisant un maillage de 6800 éléments triangulaires environ.

Les valeurs des propriétés effectives de transport sont contrôlées par trois paramètres : la porosité Π_f , le rapport des conductivités des deux phases k_s/k_f et le nombre de Péclet de cellule défini par

$$Pe = \rho_f c_{pf} \frac{\langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} a}{k_f}. \quad (4.40)$$

On effectue les calculs pour des valeurs de Π_f allant de 0,38 à 0,80, pour des valeurs de k_s/k_f allant de 0,01 à 100 et des valeurs de Pe allant de 0,1 à 1000. Le problème macroscopique étant unidimensionnel, on ne s'intéresse aux propriétés effective du milieu que dans la direction x . On s'intéressera aux propriétés effectives adimensionnées définies par

$$k_{ff,xx}^+ = \frac{k_{ff,xx}}{k_f},$$

$$k_{fs,xx}^+ = \frac{k_{fs,xx}}{k_f},$$

$$k_{sf,xx}^+ = \frac{k_{sf,xx}}{k_f},$$

$$k_{ss,xx}^+ = \frac{k_{ss,xx}}{k_f},$$

$$u_{ff,x}^+ = \frac{u_{ff,x}}{\rho_f c_{pf} \langle v_f \rangle^{mf}},$$

$$u_{fs,x}^+ = \frac{u_{fs,x}}{\rho_f c_{pf} \langle v_f \rangle^{mf}},$$

$$u_{sf,x}^+ = \frac{u_{sf,x}}{\rho_f c_{pf} \langle v_f \rangle^{mf}},$$

$$u_{ss,x}^+ = \frac{u_{ss,x}}{\rho_f c_{pf} \langle v_f \rangle^{mf}},$$



4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

$$(Ah)^+ = \frac{Aha^2}{k_f}.$$

Le champ de vitesse est déterminé en résolvant un problème de Stokes avec conditions aux limites périodiques et sans terme source de gravité. Le bilan local de quantité de mouvement est donc donné par

$$\mathbf{0} = -\nabla p_f + \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}_f \quad \text{dans } \mathcal{V}_f^m, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{0} \quad \text{sur } \mathcal{A}^m, \quad (4.42)$$

où p_f , μ_f et \mathbf{v}_f sont respectivement la pression, la viscosité et la vitesse du fluide. Le bilan de masse s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{V}_f^m. \quad (4.43)$$

On suppose que le champ de vitesse macroscopique est orienté selon l'axe x :

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} = \langle v_f \rangle^{mf} \mathbf{e}_x \quad (4.44)$$

où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire associé à l'axe x . On opte donc pour les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{v}_f(x=0, y) = \mathbf{v}_f(x=a, y) \quad (4.45)$$

$$p_f(x=0, y) = p_f(x=a, y) + \delta p \quad (4.46)$$

$$\mathbf{v}_f(x, y=0) = \mathbf{v}_f(x, y=a) \quad (4.47)$$

$$p_f(x, y=0) = p_f(x, y=a) \quad (4.48)$$

où $\delta p > 0$ est un écart de pression arbitrairement choisi. Il faut enfin fixer une référence de pression en un point du domaine fluide pour contraindre suffisamment le problème. Il est ensuite possible de calculer le champ de vitesse correspondant à n'importe quelle valeur de $\langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf}$ en multipliant la solution obtenue par un scalaire bien choisi. On utilise un maillage de 21 000 éléments.

Conductivité effective. Des exemples de résultats pour $\Pi_f = 0,80$ sont présentés sur les figures 4.3 et 4.4. Les comportements des tenseurs de conductivité en fonction de k_s/k_f et de Pe sont très similaires à ceux mis en évidence par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997). On retrouve notamment la dépendance en Pe^n aux grandes valeurs de Pe pour $k_{ff,xx}$, avec $n \simeq 1,8$. Dans tous les cas, la conductivité effective de la phase solide est inférieure à k_s . On a même $k_{ss,xx}/k_s \ll 1$



4.3. Caractérisation du milieu

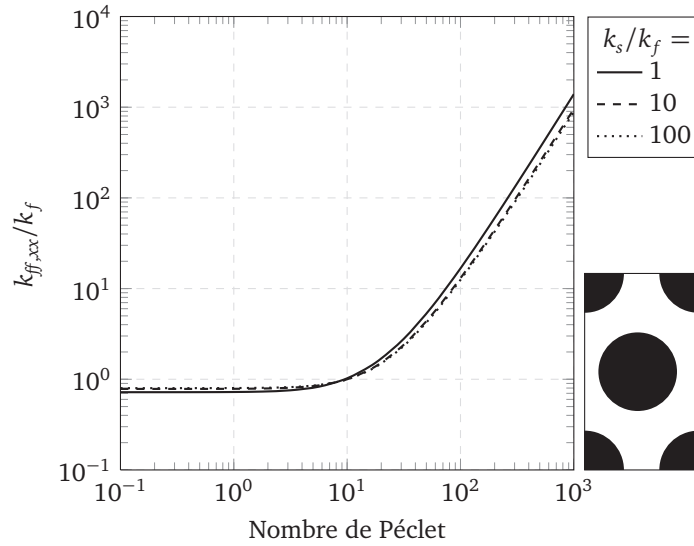


FIGURE 4.3: Conductivité effective adimensionnée $k_{ff,xx}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).

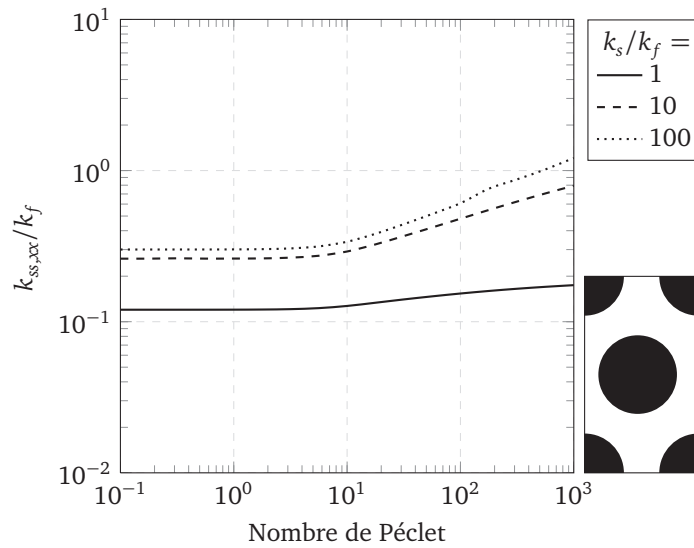


FIGURE 4.4: Conductivité effective adimensionnée $k_{ss,xx}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).

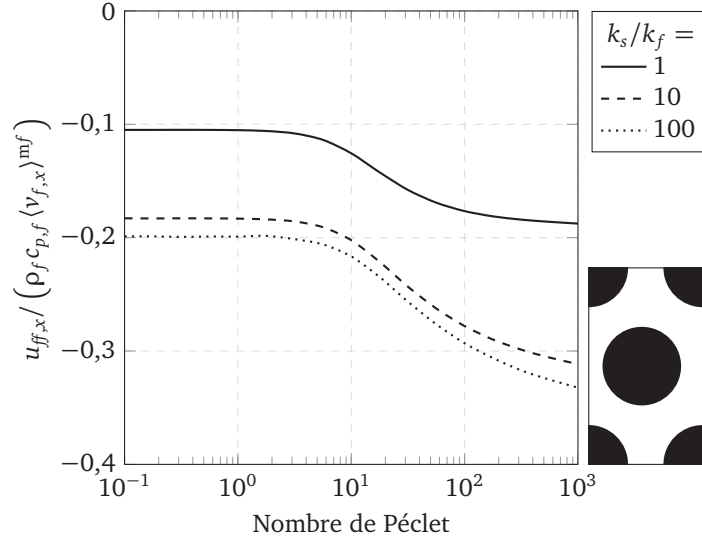


FIGURE 4.5: Vecteur pseudo-convectif adimensionné $u_{ff,x}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).

aux grandes valeurs de k_s/k_f . Ceci est dû au caractère non-consolidé du milieu : aucun transfert conductif ne peut directement avoir lieu d'un cylindre vers ses voisins ; le tenseur \mathbb{k}_{ss} est donc rendu non-nul seulement par des effets de couplage avec la phase fluide. Il n'en irait pas de même dans le cas d'un milieu consolidé.

Vecteurs pseudo-convectifs. Les tendances suivies par $u_{ff,x}^+$ sont semblables à celles observées dans l'annexe B lorsque $\Pi_f = 0,38$. Pour $\Pi_f \geq 0,50$, ce coefficient ne prend pas de valeurs positives en régime diffusif (voir figure 4.5). Aux valeurs de Pe intermédiaires, $u_{ff,x}$ est suffisamment faible pour pouvoir être négligé devant le terme convectif ; aux grandes valeurs de Pe , $u_{ff,x}$ semble pouvoir ajouter une contribution significative aux effets convectifs macroscopiques, en fonction de la valeur de k_s/k_f .

Les tendances suivies par les composantes des vecteurs pseudo-convectifs croisés $u_{fs,x}^+$ et $u_{sf,x}^+$ sont analogues à celles observées dans l'annexe B. Ces coefficients ne prennent pas de valeurs négatives à bas nombre de Péclet pour $\Pi_f \geq 0,50$, contrairement à ce qui peut être vu dans l'annexe B (voir figure 4.6).

Comme observé à l'annexe B, le coefficient $u_{ss,x}^+$ prend des valeurs faibles

4.3. Caractérisation du milieu

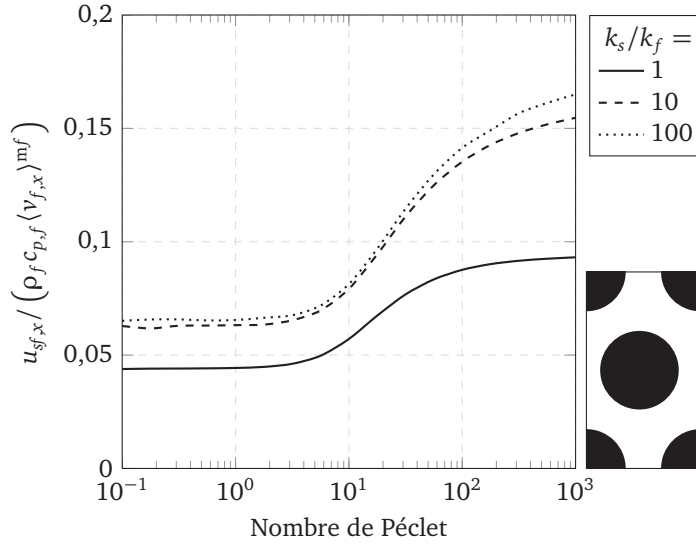


FIGURE 4.6: Vecteur pseudo-convectif adimensionné $u_{sf,x}^+$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).

en régime diffusif et décroît fortement en fonction de Pe . Le terme associé est donc probablement négligeable dans tous les régimes de transport.

Coefficient d'échange. Les variations du coefficient d'échange adimensionné $(Ah)^+$ suivent des tendances semblables à celles observées par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997). Les variations en fonction de k_s/k_f sont peu importantes pour $k_s/k_f > 10$. $(Ah)^+$ est strictement croissant en fonction de Pe et varie de 20 % ou moins entre $Pe = 0,1$ et $Pe = 1000$ (voir table 4.3). $(Ah)^+$ diminue en fonction de Π_f pour $k_s/k_f \geq 1$.

Propriétés liées au rayonnement. On donne des exemples de résultats pour $\Pi_f = 0,80$ sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9.

Les variations du coefficient de distribution ξ en fonction du nombre de Péclet sont inférieures à 10 %. Les variations en fonction de k_s/k_f sont importantes, la gamme critique se situant entre $k_s/k_f = 0,1$ et $k_s/k_f = 10$.

Les valeurs obtenues pour $p_{f,x}$ et $p_{s,x}$ permettent d'estimer les termes qui leur sont associés et de les comparer à d'autres termes. On a, par exemple, et

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

TABLE 4.3: Valeur de la moyenne et de la variation relative de $(Ah)^+$ entre $Pe = 0,1$ et $Pe = 1000$, pour différentes valeurs de Π_f et k_s/k_f . La variation relative est rapportée à la valeur de $(Ah)^+$ pour $Pe = 0,1$.

k_s/k_f		1		10		100	
		Moy.	Var.	Moy.	Var.	Moy.	Var.
Π_f	0,38	21	4,8 %	81	19 %	84	23 %
	0,50	19	4,8 %	46	15 %	55	19 %
	0,60	17	5,5 %	35	17 %	40	17 %
	0,80	7,4	11 %	19	24 %	20	24 %

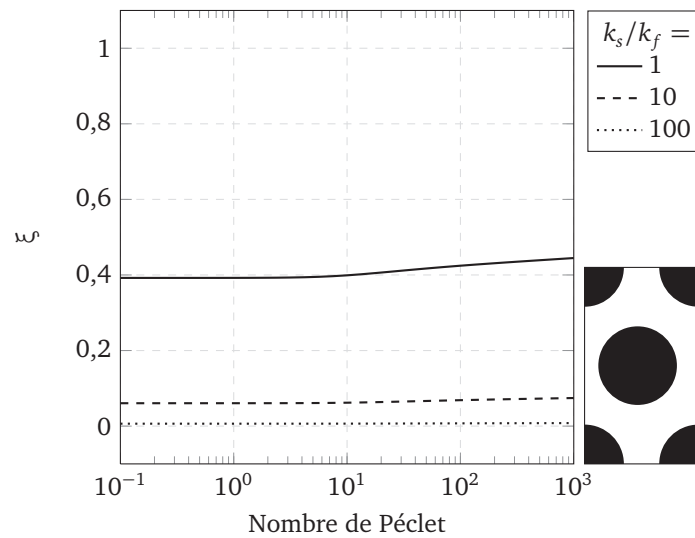


FIGURE 4.7: Valeur du coefficient de distribution ξ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).

4.3. Caractérisation du milieu

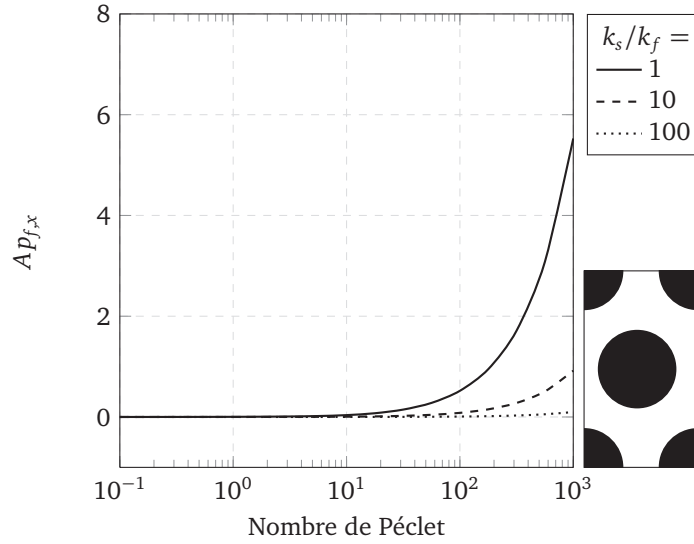


FIGURE 4.8: Valeur du coefficient $Ap_{f,x}$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).

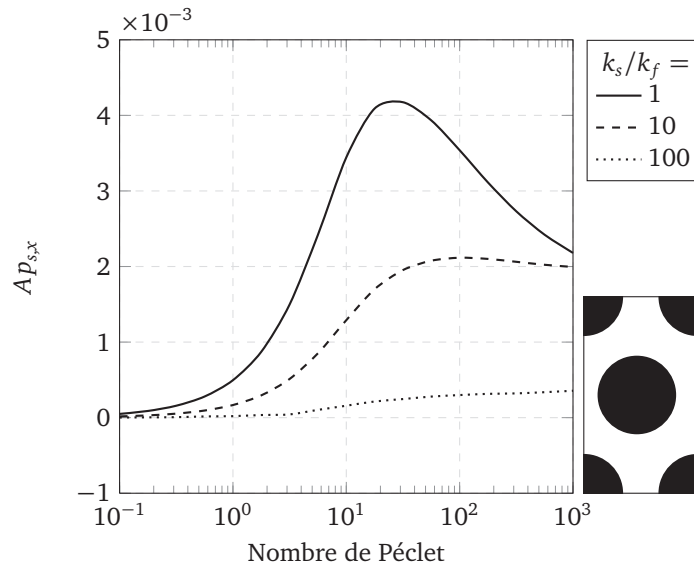


FIGURE 4.9: Conductivité effective adimensionnée $Ap_{s,x}$ en fonction du nombre de Péclet de cellule pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$).



4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

dans le cas que l'on considère :

$$\frac{\nabla \cdot (A \mathbf{p}_f \langle \varphi_w^R \rangle^m)}{\nabla \cdot (\mathbb{k}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf})} = \frac{\nabla \cdot \left(A \mathbf{p}_f \frac{1}{A} \nabla \cdot (k_w^R \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) \right)}{\nabla \cdot (\mathbb{k}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf})} \quad (4.49)$$

$$= \mathcal{O} \left(A \mathbf{p}_f \frac{l_f}{L} \frac{k_w^R}{\mathbb{k}_{ff}} \frac{\langle T_s \rangle^{ms}}{\langle T_f \rangle^{mf}} \right)$$

où l_f est la taille caractéristique du pore et L est la taille caractéristique du système. Dans l'établissement de cette estimation, on a supposé que

$$A = \mathcal{O} \left(\frac{1}{l_f} \right). \quad (4.50)$$

Dans beaucoup d'applications usuelles, on aura

$$\frac{\langle T_s \rangle^{ms}}{\langle T_f \rangle^{mf}} = \mathcal{O}(1). \quad (4.51)$$

L'hypothèse de séparation des échelles impose également d'avoir

$$\frac{l_f}{L} \ll 1. \quad (4.52)$$

La valeur de $A \mathbf{p}_f k_w^R / \mathbb{k}_{ff}$ est fonction, pour une géométrie et une absorptivité α_w données, du rapport k_s/k_f , du nombre de Péclet et de la température $\langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^m}$. La valeur de $A \mathbf{p}_f$ est telle que les cas considérés ici (on rappelle que dans l'application considérée, on suppose que $k_s/k_f \geq 1$), $\nabla \cdot (A \mathbf{p}_f \langle \varphi_w^R \rangle^m)$ sera négligeable devant le terme conductif.

On établit de même que

$$\frac{\nabla \cdot (A \mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m)}{A(1-\xi) \langle \varphi_w^R \rangle^m} = \mathcal{O} \left(A \mathbf{p}_s \frac{l_f}{L} \frac{1}{1-\xi} \right). \quad (4.53)$$

Dans les conditions considérées, on a

$$1 - \xi = \mathcal{O}(1). \quad (4.54)$$

Les valeurs de $A \mathbf{p}_s$, toujours inférieures à 10^{-2} , permettent donc d'établir que $\nabla \cdot (A \mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m)$ pourra toujours être négligé devant le terme source radiatif.





4.4. Résolution numérique du problème macroscopique

4.4 Résolution numérique du problème macroscopique

4.4.1 Problème aux limites

Le problème macroscopique que l'on résout est unidimensionnel. On peut donc écrire les bilans locaux d'énergie des différentes phases sous une forme 1 D. On a donc, pour la phase fluide :

$$\begin{aligned}
 & \Pi_f \text{Pe} \frac{d\langle T_f \rangle^{mf}}{dx^+} - \text{Pe} u_{ff,x}^+ \frac{d\langle T_f \rangle^{mf}}{dx^+} - \text{Pe} u_{fs,x}^+ \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \\
 &= \frac{d}{dx^+} \left(k_{ff,xx}^+ \frac{d\langle T_f \rangle^{mf}}{dx^+} \right) + \frac{d}{dx^+} \left(k_{fs,xx}^+ \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \right) \\
 & \quad + (Ah)^+ (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) + \xi \frac{d}{dx^+} \left(k_w^R \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \right) \\
 & \quad + \frac{d}{dx^+} \left(p_{f,x}^+ \frac{d}{dx^+} \left(k_w^R \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \right) \right). \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Pour la phase solide, on a :

$$\begin{aligned}
 & - \text{Pe} u_{sf,x}^+ \frac{d\langle T_f \rangle^{mf}}{dx^+} - \text{Pe} u_{ss,x}^+ \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \\
 &= \frac{d}{dx^+} \left(k_{sf,xx}^+ \frac{d\langle T_f \rangle^{mf}}{dx^+} \right) + \frac{d}{dx^+} \left(k_{ss,xx}^+ \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \right) \\
 & \quad + (Ah)^+ (\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms}) + (1 - \xi) \frac{d}{dx^+} \left(k_w^R \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \right) \\
 & \quad + \frac{d}{dx^+} \left(p_{s,x}^+ \frac{d}{dx^+} \left(k_w^R \frac{d\langle T_s \rangle^{ms}}{dx^+} \right) \right). \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Les longueurs ont été adimensionnées en posant

$$x^+ = x/a. \quad (4.57)$$

On a également défini

$$p_{f,x}^+ = \frac{p_{f,x}}{a}, \quad (4.58)$$

$$p_{s,x}^+ = \frac{p_{s,x}}{a}. \quad (4.59)$$



4. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

Les termes associés à ces propriétés effectives n'ont pas été négligés afin de permettre la vérification de l'estimation établie à la fin de la section 4.3.2. On ne peut pas adimensionner les températures car la conductivité radiative est proportionnelle à $\langle T_s \rangle^{\text{ms}3}$.

Les conditions aux limites correspondant au problème exposé plus haut sont les suivantes :

$$\langle T_f \rangle^{\text{mf}} (x^+ = 0) = T_{f0}, \quad (4.60)$$

$$\langle T_s \rangle^{\text{ms}} (x^+ = 0) = T_{s0}, \quad (4.61)$$

$$\frac{d\langle T_f \rangle^{\text{mf}}}{dx^+} (x^+ \rightarrow \infty) = 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{d\langle T_s \rangle^{\text{ms}}}{dx^+} (x^+ \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.63)$$

La mise en œuvre pratique des conditions aux limites (4.62) et (4.63) nécessite la définition d'une abscisse x_{max}^+ suffisamment grande pour que l'équilibre thermique y soit établi. On choisira une valeur de x_{max}^+ de l'ordre de 10 fois la longueur d'établissement de l'équilibre thermique à L_{eq}^+ , définie comme la longueur adimensionnée telle que

$$\left| \frac{\langle T_s \rangle^{\text{ms}} - \langle T_f \rangle^{\text{mf}}}{T_{s0} - T_{f0}} \right| (x^+ \geq L_{\text{eq}}^+) \leq 0,01. \quad (4.64)$$

L_{eq}^+ est une estimation de la taille du domaine dans lequel le système subit une évolution. Pour $x^+ > L_{\text{eq}}^+$, on n'observe que des transferts négligeables au sein et entre les phases. L_{eq}^+ est donc une estimation du rapport L/a , où L est la taille caractéristique du système. Ainsi, L_{eq}^+ est donc un indicateur de validité de l'hypothèse de séparation des échelles.

Les calculs dont les résultats sont présentés ici ont été effectués avec $x_{\text{max}}^+ = 1000$. Lors de la résolution du problème, on s'intéressera à deux grandeurs :

- la longueur caractéristique d'établissement L_{eq}^+ ;
- la température d'équilibre T_{∞} .

4.4.2 Méthodes numériques

On résout ce problème aux limites en utilisant l'outil de calcul COMSOL Multiphysics v4.2a. On utilise des éléments finis de type polynôme d'ordre 3 afin

4.4. Résolution numérique du problème macroscopique

d'améliorer l'approximation des dérivées d'ordre 2 et 3. Le maillage comporte initialement 50 éléments et est raffiné automatiquement dans les zones de forts gradients par un solveur adaptatif en espace. On fixe le nombre maximal de mailles à 5000 environ.

COMSOL Multiphysics utilise une version amortie du solveur de Newton pour résoudre les problèmes aux limites (voir section B.3). On fixe par défaut le facteur d'amortissement initial à 0,01 (il est ensuite ajusté automatiquement par le solveur). Les systèmes linéaires sont inversés au moyen du solveur direct PARDISO.

4.4.3 Résultats

Choix des paramètres physiques. Le problème a été défini sans préciser la porosité Π_f du milieu, l'espacement inter-centres a et les températures d'entrée T_{f0} et T_{s0} . Les résultats présentés dans l'annexe C associés aux résultats de calculs de propriétés effectives permettent d'établir que beaucoup de combinaisons de ces paramètres physiques aboutiront à des valeurs de L_{eq}^+ inférieures ou de l'ordre de 1, même en présence de rayonnement, en raison de la faible valeur de la conductivité effective adimensionnée $k_{ss,xx}^+$ et de la conductivité radiative adimensionnée $k_w^{R+} = k_w^R/k_f$. Dans ces situations, les longueurs caractéristiques de variation des grandeurs macroscopiques deviennent de l'ordre ou inférieures à la taille caractéristique du pore l_f . La contrainte de séparation des échelles, nécessaire à l'établissement des équations macroscopiques, n'est alors pas satisfaite. Certains choix sur les températures d'entrée peuvent également donner des gradients trop importants dans le champ $\langle T_s \rangle^{ms}$ et conduire à la non-satisfaction du critère de validité de la loi de Fourier radiative.

L'ajout du terme radiatif aura pour effet d'augmenter la conductivité effective de la phase solide, augmentant potentiellement la valeur de L_{eq}^+ . Le rayonnement va « consolider » le milieu. Afin que k_w^R ne limite pas L_{eq}^+ , il faut avoir

$$k_w^{R+} \geq \max_{Pe} (k_{ff,xx}^+). \quad (4.65)$$

Le terme convectif pouvant devenir prépondérant aux grandes valeurs de Pe si la porosité est élevée, la valeur de k_w^{R+} ne limitant pas L_{eq}^+ peut être encore plus élevée. On peut augmenter la conductivité k_w^{R+} en augmentant a , Π_f et la température moyenne.

L'augmentation de T_{f0} et T_{s0} et la limitation de l'écart $T_{s0} - T_{f0}$ diminuent par ailleurs la dérivée logarithmique du champ de température $\langle T_s \rangle^{ms}$ afin

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

de satisfaire le critère de validité de la loi de Fourier radiative. On choisit donc d'effectuer des simulations pour $\Pi_f = 0,80$ et $a = 2 \times 10^{-2}$ m. On choisit $T_{s0} = 2500$ K (valeur proche du maximum que l'on puisse envisager pour un solide) et $T_{f0} = 0,9 T_{s0} = 2250$ K. Les valeurs des propriétés effectives utilisées pour ces simulations correspondent à celles présentées à la section 4.3. La figure 4.10 représente la conductivité radiative en fonction de la température de paroi Θ_w pour la configuration considérée.

On fait varier Pe de 0,1 à 1000, et k_s/k_f de 1 à 100. Il est important de noter que $Pe = 1000$ correspond à une vitesse d'écoulement élevée, de l'ordre de 40 m s^{-1} d'après les propriétés thermophysiques données par TAINE, IACONA et PETIT (2008). La table 4.4 présente l'ensemble des résultats obtenus. La figure 4.11 représente le champ de température en fonction de l'abscisse adimensionnée x^+ pour $k_s/k_f = 10$.

4.4. Résolution numérique du problème macroscopique

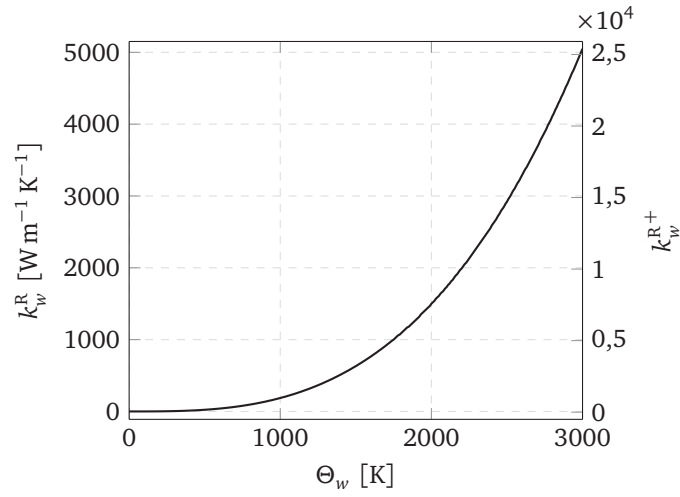


FIGURE 4.10: Conductivité radiative en fonction de la température pour un agencement équilatéral ($\Pi_f = 0,80$, $a = 2 \times 10^{-2}$ m, $k_f = 0,2$ W m $^{-1}$ K $^{-1}$).

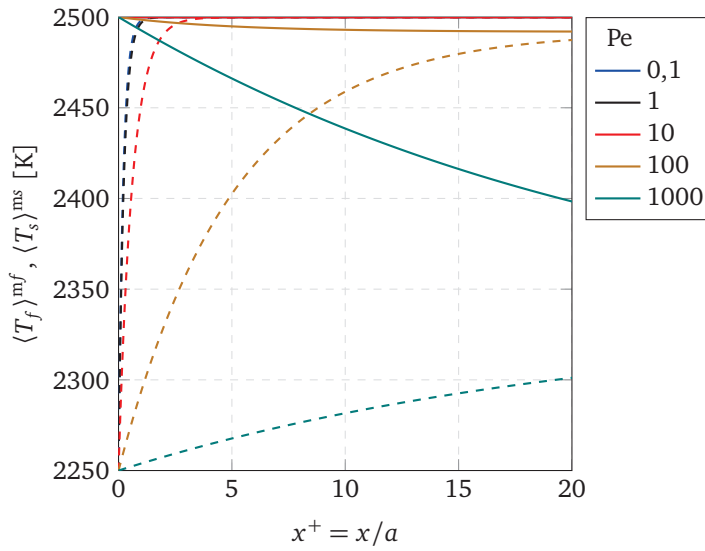


FIGURE 4.11: Champ de température en fonction de l'abscisse adimensionnée x^+ ($k_s/k_f = 10$). Trait plein : $\langle T_s \rangle^{ms}$; trait interrompu : $\langle T_f \rangle^{mf}$.

4. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

TABLE 4.4: Calculs macroscopiques : résultats (1/2).

Réf.	k_s/k_f	Pe	L_{eq}^+	T_∞
01	1	1×10^{-1}	$8,8 \times 10^{-1}$	2500
02	1	3×10^{-1}	$9,1 \times 10^{-1}$	2500
03	1	1	$9,9 \times 10^{-1}$	2500
04	1	3	1,3	2500
05	1	1×10^1	2,7	2500
06	1	3×10^1	7,6	2499
07	1	1×10^2	$2,2 \times 10^1$	2492
08	1	3×10^2	$5,7 \times 10^1$	2447
09	1	1×10^3	$9,2 \times 10^1$	2340
10	3	1×10^{-1}	$8,9 \times 10^{-1}$	2500
11	3	3×10^{-1}	$9,2 \times 10^{-1}$	2500
12	3	1	1,0	2500
13	3	3	1,3	2500
14	3	1×10^1	2,7	2500
15	3	3×10^1	7,6	2499
16	3	1×10^2	$2,3 \times 10^1$	2492
17	3	3×10^2	$5,8 \times 10^1$	2447
18	3	1×10^3	$9,3 \times 10^1$	2338
19	10	1×10^{-1}	$9,4 \times 10^{-1}$	2500
20	10	3×10^{-1}	$9,7 \times 10^{-1}$	2500
21	10	1	1,1	2500
22	10	3	1,4	2500
23	10	1×10^1	2,8	2500
24	10	3×10^1	7,8	2499
25	10	1×10^2	$2,3 \times 10^1$	2492
26	10	3×10^2	$5,9 \times 10^1$	2444
27	10	1×10^3	$9,3 \times 10^1$	2332

Suite à la page 91

4.4. Résolution numérique du problème macroscopique

TABLE 4.4: Calculs macroscopiques : résultats (2/2).

Réf.	k_s/k_f	Pe	L_{eq}^+	T_∞
28	30	1×10^{-1}	$9,5 \times 10^{-1}$	2500
29	30	3×10^{-1}	$9,7 \times 10^{-1}$	2500
30	30	1	1,1	2500
31	30	3	1,4	2500
32	30	1×10^1	2,8	2500
33	30	3×10^1	7,8	2499
34	30	1×10^2	$2,3 \times 10^1$	2492
35	30	3×10^2	$5,9 \times 10^1$	2443
36	30	1×10^3	$9,4 \times 10^1$	2331
37	100	1×10^{-1}	$9,6 \times 10^{-1}$	2500
38	100	3×10^{-1}	$9,9 \times 10^{-1}$	2500
39	100	1	1,1	2500
40	100	3	1,4	2500
41	100	1×10^1	2,8	2500
42	100	3×10^1	7,9	2499
43	100	1×10^2	$2,3 \times 10^1$	2492
44	100	3×10^2	$5,9 \times 10^1$	2443
45	100	1×10^3	$9,4 \times 10^1$	2330
48†	1	1×10^3	$1,3 \times 10^2$	2320
49†	3	1×10^3	$1,2 \times 10^2$	2322

† Résultats obtenus avec $\xi = 0$.

4. RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

Influence du nombre de Péclet. Le nombre de Péclet a une influence essentielle sur la valeur de L_{eq}^+ (voir la série 19-27, par exemple). Avec les paramètres physiques utilisés, le terme convectif est largement dominant devant le terme de diffusion aux grandes valeurs de Pe (voir figure 4.12).

Réf.	k_s/k_f	Pe	L_{eq}^+	T_∞
19	10	1×10^{-1}	$9,4 \times 10^{-1}$	2500
20	10	3×10^{-1}	$9,7 \times 10^{-1}$	2500
21	10	1	1,1	2500
22	10	3	1,4	2500
23	10	1×10^1	2,8	2500
24	10	3×10^1	7,8	2499
25	10	1×10^2	$2,3 \times 10^1$	2492
26	10	3×10^2	$5,9 \times 10^1$	2444
27	10	1×10^3	$9,3 \times 10^1$	2332

Pour $\text{Pe} \leq 10$ et pour toutes les valeurs de k_s/k_f , L_{eq}^+ prend des valeurs mettant en défaut la contrainte de séparation des échelles. Dans ces régimes (ex. : série 01-10-19-28-37), les effets diffusifs dans la phase solide (conductivité effective et conductivité radiative) étant grands devant les effets diffusifs et convectifs dans la phase fluide, la température à l'infini est imposée par la phase solide.

Réf.	k_s/k_f	Pe	L_{eq}^+	T_∞
01	1	1×10^{-1}	$8,8 \times 10^{-1}$	2500
10	3	1×10^{-1}	$8,9 \times 10^{-1}$	2500
19	10	1×10^{-1}	$9,4 \times 10^{-1}$	2500
28	30	1×10^{-1}	$9,5 \times 10^{-1}$	2500
37	100	1×10^{-1}	$9,6 \times 10^{-1}$	2500
05	1	1×10^1	2,7	2500
14	3	1×10^1	2,7	2500
23	10	1×10^1	2,8	2500
32	30	1×10^1	2,8	2500
41	100	1×10^1	2,8	2500

4.4. Résolution numérique du problème macroscopique

Influence du rapport de conductivités. La variation de k_s/k_f ne modifie pas l'ordre de grandeur de $k_{ff,xx}$, ni celui de k_w^R . Cela n'affecte donc pas les valeurs de T_∞ et de L_{eq}^+ de façon significative en régime diffusif (ex. : série 01-10-19-28-37) :

- L_{eq}^+ varie de 9 % pour des variations de 1 à 100 de k_s/k_f ;
- $(T_\infty - T_{f0}) / (T_{s0} - T_{f0})$ varie de moins de 1 % pour des variations de 1 à 100 de k_s/k_f .

Pour les hautes valeurs de Pe , les termes source radiatif et convectif dominant et leurs ordres de grandeur ne sont pas influencés par k_s/k_f . On n'a donc pas d'effets importants sur les valeurs de T_∞ et de L_{eq}^+ (série 09-18-27-36-45) :

- L_{eq}^+ varie de 2 % pour des variations de 1 à 100 de k_s/k_f ;
- $(T_\infty - T_{f0}) / (T_{s0} - T_{f0})$ varie de 4 % pour des variations de 1 à 100 de k_s/k_f .

Réf.	k_s/k_f	Pe	L_{eq}^+	T_∞
01	1	1×10^{-1}	$8,8 \times 10^{-1}$	2500
10	3	1×10^{-1}	$8,9 \times 10^{-1}$	2500
19	10	1×10^{-1}	$9,4 \times 10^{-1}$	2500
28	30	1×10^{-1}	$9,5 \times 10^{-1}$	2500
37	100	1×10^{-1}	$9,6 \times 10^{-1}$	2500
05	1	1×10^1	2,7	2500
14	3	1×10^1	2,7	2500
23	10	1×10^1	2,8	2500
32	30	1×10^1	2,8	2500
41	100	1×10^1	2,8	2500
09	1	1×10^3	$9,2 \times 10^1$	2340
18	3	1×10^3	$9,3 \times 10^1$	2338
27	10	1×10^3	$9,3 \times 10^1$	2332
36	30	1×10^3	$9,4 \times 10^1$	2331
45	100	1×10^3	$9,4 \times 10^1$	2330

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

Influence du coefficient de distribution. L'inclusion du coefficient de distribution ξ dans le modèle présente un intérêt aux valeurs de k_s/k_f de l'ordre de 1 (série 09-18-48-49). ξ inclut en effet les effets de couplage entre le rayonnement et les autres modes de transfert à l'échelle locale.

Réf.	k_s/k_f	Pe	ξ	L_{eq}^+	T_∞
09	1	1×10^3	0,44	$9,2 \times 10^1$	2340
18	3	1×10^3	0,32	$9,3 \times 10^1$	2338
48	1	1×10^3	0	$1,3 \times 10^2$	2320
49	3	1×10^3	0	$1,2 \times 10^2$	2322

L'inclusion simple du terme de rayonnement dans la phase solide sans coefficient de distribution (ce qui revient à imposer $\xi = 0$) conduit à surestimer L_{eq}^+ d'environ 40 % et à sous-estimer T_∞ de 20 K (8 % de l'écart $T_{s0} - T_{f0}$) lorsque $k_s/k_f = 1$. La variation de L_{eq}^+ est certainement due au fait que l'augmentation de ξ , toutes autres propriétés effectives et tous paramètres physiques égaux par ailleurs, conduit à la diminution de la conductivité effective totale dans la phase solide. La cause de la variation de la température finale est en revanche plus difficile à attribuer. Lorsque de rapport des conductivités k_s/k_f augmente et atteint des valeurs de 10 ou plus, ξ est proche de 0 (voir figure 4.7).

Termes dominants. Les valeurs relatives des différents termes sont représentées pour $k_s/k_f = 10$ sur les figures 4.12 et 4.13. Dans les cas où L_{eq}^+ est suffisamment grande pour respecter la contrainte de séparation des échelles, c.-à-d. pour $Pe \geq 30$, le terme d'échange est dominant dans les deux phases. On ne considérera que ces cas dans ce qui va suivre, les autres correspondant à des cas dans lesquels le modèle n'est *a priori* pas valable.

Dans la phase fluide, les termes d'échange, convectif et pseudo-convectifs représentent les contributions les plus importantes (voir figures 4.12 et 4.13). Le terme source radiatif dans la phase fluide est petit mais pas négligeable. Le terme de diffusion-dispersion (associé à \mathbb{k}_{ff}) est très petit (contribution inférieure à 3 %). Les termes associés à \mathbb{k}_{fs} et \mathbf{p}_f sont négligeables. Le terme associé à \mathbf{u}_{fs} n'est non-négligeable que pour $Pe > 100$.

Dans la phase solide, les termes d'échange et radiatif sont les plus importants. Le terme pseudo-convectif associé à \mathbf{u}_{sf} apporte également une contribution non-négligeable. Les termes associés à \mathbf{u}_{ss} , \mathbb{k}_{sf} , \mathbb{k}_{ss} et \mathbf{p}_s sont négligeables.

4.4. Résolution numérique du problème macroscopique

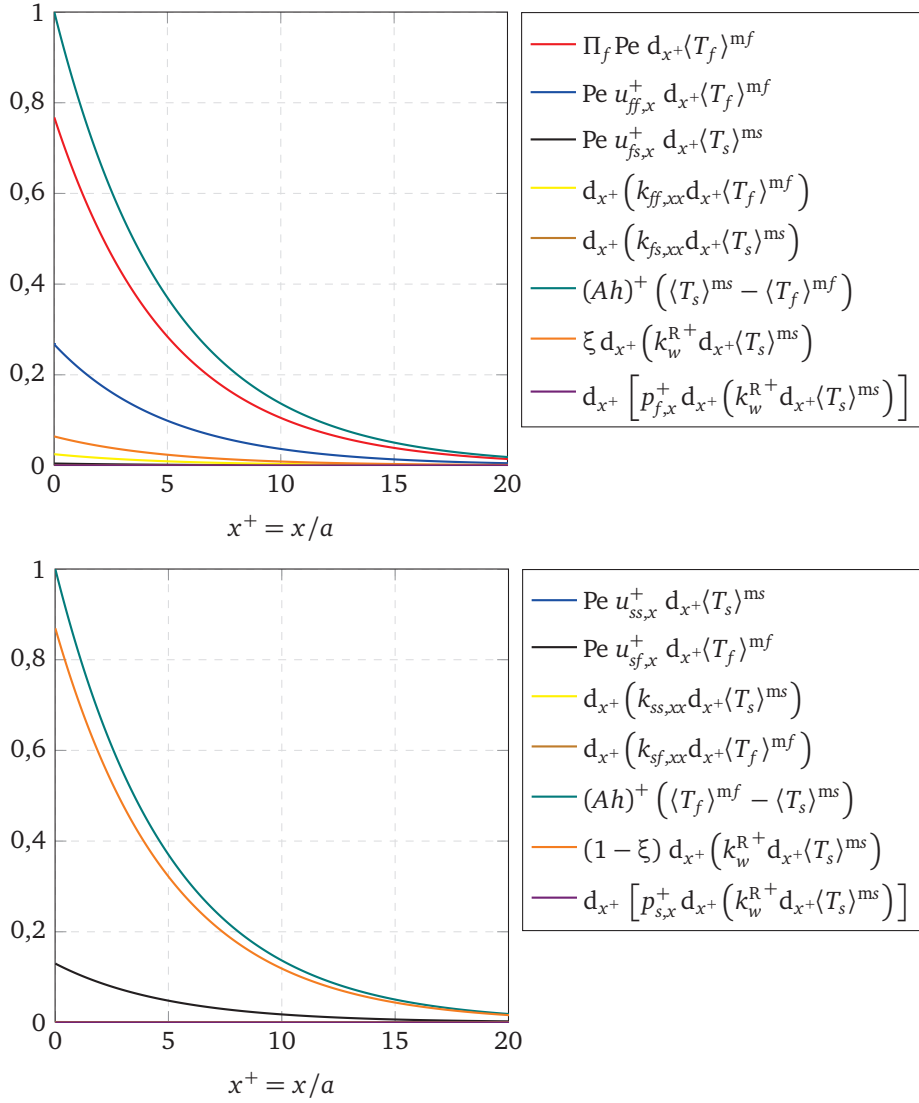


FIGURE 4.12: Comparaison des termes dans le bilan d'énergie macroscopique ($k_s/k_f = 10$, $\text{Pe} = 100$, réf. 25). La valeur absolue des différents termes du bilan d'énergie est représentée, normalisée par la valeur maximale du terme dominant (ici, le terme d'échange).

4. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME MACROSCOPIQUE DE TRANSFERTS COUPLÉS

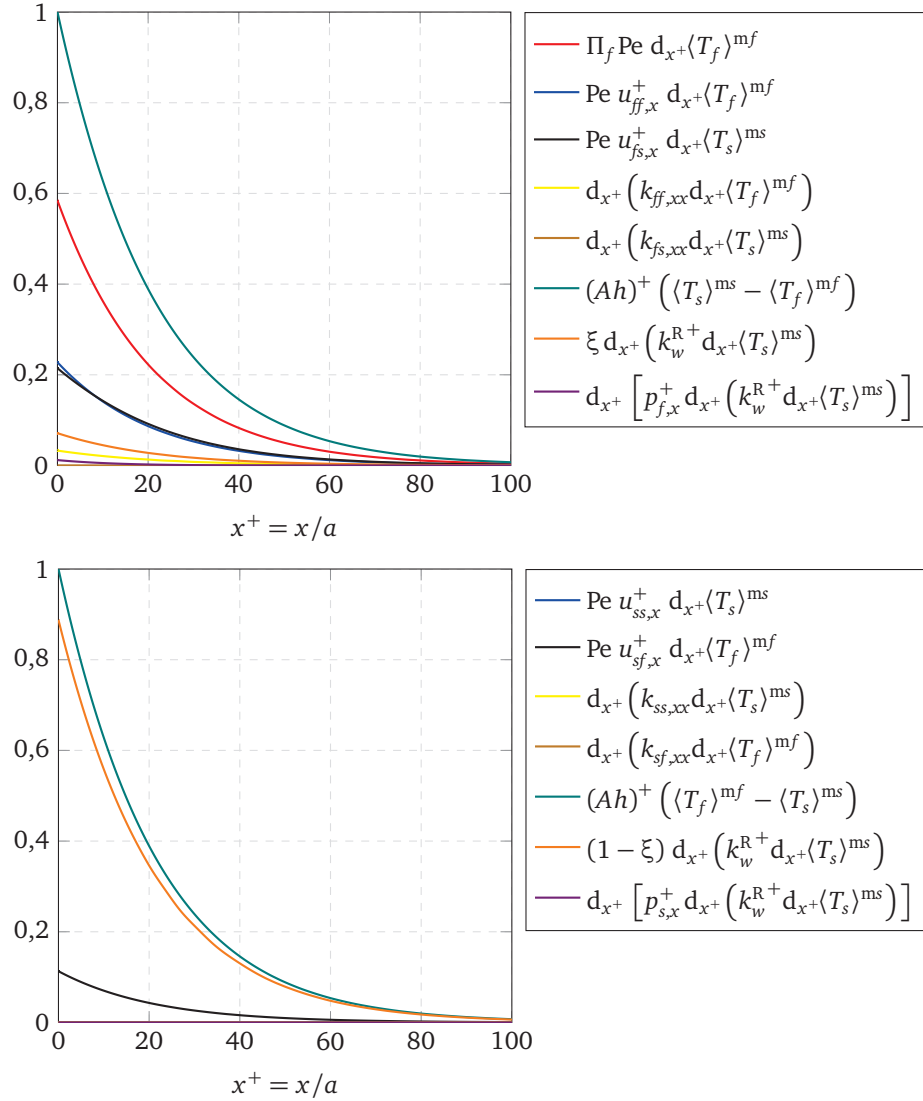


FIGURE 4.13: Comparaison des termes dans le bilan d'énergie macroscopique ($k_s/k_f = 10$, $Pe = 1000$, réf. 27). La valeur absolue des différents termes du bilan d'énergie est représentée, normalisée par la valeur maximale du terme dominant (ici, le terme d'échange).

4.5 Conclusion

Le modèle présenté au chapitre 3 peut être utilisé et simplifié pour traiter partiellement le cas macroscopique décrit dans ce chapitre. La contrainte de séparation des échelles est satisfaite en régime convectif, lorsque la conductivité radiative est suffisamment élevée. La conductivité radiative est ici suffisamment élevée pour ne pas limiter la valeur L_{eq}^+ et suffisamment faible pour permettre l'observation de l'influence du nombre de Péclet sur T_∞ . En régime diffusif, L_{eq}^+ est trop faible pour permettre la satisfaction de la contrainte de séparation des échelles. Traiter ce problème dans des configurations dans lesquelles la conductivité radiative est faible ou en régime diffusif nécessite requiert l'usage d'un modèle dédié aux phénomènes d'interface, en particulier pour les transferts conductifs et convectifs.

La température moyenne de paroi $\langle T_w \rangle^{qm}$ a été prise égale à la température moyenne de la phase solide $\langle T_s \rangle^{ms}$, et l'estimation du nombre de Biot faite à la sous-section 4.2.2 montre que ce n'est pas une approximation acceptable dans de nombreux cas. Une estimation plus rigoureuse de la température de paroi est nécessaire pour traiter les cas dans lesquels on a $Bi \geq 0,1$.

Plusieurs approximations ont été faites pour obtenir le modèle utilisé ici :

- ① Les déviations $\tilde{\varphi}_w^R$ du flux radiatif à l'échelle locale ont été négligées devant le terme moyen $\langle \varphi_w^R \rangle^m$.
- ② Le flux radiatif macroscopique $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ a été pris égal à celui donné par la loi de Fourier radiative macroscopique donnée par l'équation (4.22).

La quantification des erreurs associées à chacune de ces approximations nécessite un calcul de référence effectué au moyen de la GRTE, dans le cadre le plus général du modèle de couplage développé au chapitre 3. La boucle à l'échelle locale donnerait accès au flux radiatif à l'échelle du pore, permettant ainsi de déterminer l'erreur associée aux approximations ① et ②.

Il faut garder à l'esprit que le cas traité ici est particulier à plusieurs titres. Tout d'abord, la géométrie retenue, sans contact, a un impact important sur les valeurs des propriétés effectives et sur leur dépendance en fonction du rapport k_s/k_f . Ensuite, le non-équilibre thermique local est introduit par les conditions aux limites en $x = 0$; dans les systèmes réels, le non-équilibre thermique est plutôt dû aux conditions initiales. Des études portant sur une variété plus importante de cas doivent encore être effectuées.





Chapitre 5

Conclusion

L'OBJET DE cette étude est de proposer une procédure de changement d'échelle pour les transferts radiatifs, conductifs et convectifs couplés dans les milieux poreux. Cette solution consiste à utiliser un modèle d'homogénéisation statistique du rayonnement pour produire une description homogénéisée des transferts radiatifs. L'homogénéisation des phases pour le rayonnement est faite au moyen d'une méthode statistique. La compatibilité des échelles de longueur associées à cette méthode avec celle de la méthode de prise de moyenne volumique, utilisée pour homogénéiser les autres modes de transfert, a été examinée. Le modèle de transferts couplés à l'échelle locale repose sur (i) la construction d'un champ de température pour déterminer l'émission à partir du champ de température local de la matière, et (ii) un bilan d'énergie couplé à l'échelle locale. La méthode de prise de moyenne volumique a ensuite été appliquée aux bilans locaux pour obtenir un modèle macroscopique de transferts couplés. Les bilans d'énergie macroscopiques font apparaître des propriétés effectives liées à la prise en compte des hétérogénéités du champ de puissance radiative à l'échelle locale.

La méthode employée pour tenir compte du couplage rend le calcul de certaines propriétés effectives dépendant de la solution du problème macroscopique. Ceci est une originalité de cette étude. La résolution du problème macroscopique de transferts devient donc itérative. Les calculs itératifs sont caractéristiques des couplages entre rayonnement et autres modes de transfert. Cependant, le nombre relativement faible de paramètres macroscopiques pouvant influencer la solution des problèmes de fermeture permet d'alléger le coût en calcul de la résolution en tabulant les propriétés effectives en fonction de

5. CONCLUSION

ces paramètres.

Des calculs des propriétés effectives associées à l'étape d'initialisation de la procédure itérative de résolution ont été présentés. Un modèle macroscopique de transferts été établi à partir du modèle de couplage proposé en faisant des hypothèses simplificatrices sur le flux radiatif ; ce modèle utilise les propriétés effectives calculées. On a démontré que dans le domaine de validité du modèle, les termes additionnels différenciant ce modèle couplé simplifié de celui proposé par QUINTARD et WHITAKER (2000) sont négligeables. Sous cette forme, le coût de la mise en œuvre du modèle est fortement réduit. La justification de certaines approximations effectuées nécessite cependant la résolution du problème couplé complet selon la procédure itérative présentée.

La poursuite des travaux théoriques sur le sujet du couplage entre les modes de transfert, dans le cadre développé ici, doit porter sur plusieurs aspects, qui vont être présentés.

Limites du modèle

Diverses hypothèses ont été faites pour établir ce modèle. On a supposé que les conditions de validité du modèle d'homogénéisation statistique du rayonnement sont respectées. Cela implique que :

- ① Les conditions de validité des lois de l'optique géométrique sont satisfaites à l'échelle locale. Cela signifie donc que l'on a, pour toute longueur d'onde λ pour laquelle le rayonnement n'est pas négligeable,

$$\lambda \ll l_f, l_s, \quad (5.1)$$

où l_f et l_s sont les tailles caractéristiques respectives des phases fluide et solide.

- ② La géométrie du milieu est connue avec une résolution l_t telle que

$$l_t \ll l_f, l_s. \quad (5.2)$$

L'information sur la géométrie peut être issue d'une description analytique du milieu ou de données expérimentales comme celles d'une tomographie X ou γ .

- ③ Les propriétés radiatives sont connues à une échelle de longueur petite devant l_t .

Ces hypothèses, essentielles à la validité du modèle de rayonnement, ne représentent pas des limitations significatives.

On a fait par ailleurs les hypothèses suivantes sur la morphologie du milieu et sur la configuration macroscopique étudiée :

- ④ Le milieu est statistiquement uniforme.
- ⑤ Le milieu est statistiquement isotrope.
- ⑥ On se situe à une distance suffisante des interfaces entre le milieu poreux et un autre milieu pour ne pas avoir à modéliser les phénomènes d'interface, tant du point de vue du rayonnement que du point de vue de la prise de moyenne volumique. Cela implique que (i) l'interface est à une distance supérieure à l'épaisseur de couche limite radiative l_b^R (voir sous-section 2.3.2), et (ii) les champs moyens ne présentent pas de « forts gradients » (cela se traduit par des contraintes d'échelles semblables à celles énoncées, par exemple, par QUINTARD et WHITAKER (2000)).

Les hypothèses sur l'isotropie et l'uniformité statistiques du milieu ont été faites par commodité et les lever ne modifie pas fortement la démarche de couplage. Les deux hypothèses suivantes sont en revanche plus contraignantes : elles limitent la validité du modèle à des zones éloignées des interfaces. Or, de nombreux problèmes pratiques nécessitent la modélisation de ces phénomènes. Le modèle de rayonnement est clairement établi pour les zones incluses dans la couche limite radiative (TAINÉ et IACONA, 2012) et de nombreux travaux de modélisation des phénomènes d'interface par la méthode de prise de moyenne volumique aient été faits (AGUILAR-MADERA et al., 2011 ; D'HUEPPE et al., 2011 ; GOYEAU et al., 2003 ; VALDÉS-PARADA, ALVAREZ-RAMÍREZ et al., 2009 ; VALDÉS-PARADA, GOYEAU et al., 2006 ; B. D. WOOD et al., 2000), mais la procédure de couplage doit être définie.

On a enfin fait les hypothèses suivantes sur les propriétés des matériaux et la physique de l'écoulement :

- ⑦ Les propriétés thermo-physiques des matériaux (conductivité thermique et capacité thermique) varient sur des échelles de longueur de l'ordre de la taille caractéristique macroscopique L . On néglige donc les variations des propriétés thermo-physiques aux petites échelles. Une discussion sur ce sujet est faite par WHITAKER (1987, 1988).

5. CONCLUSION

- ⑧ Le couplage entre le bilan d'énergie et le bilan de quantité de mouvement n'est pas modélisé : les propriétés physiques intervenant dans le bilan de quantité de mouvement ne varient pas en fonction de la température. Cela permet de limiter le cadre de l'étude au bilan d'énergie et de considérer que le champ de vitesse dans la phase fluide est une donnée extérieure au problème. On peut donc utiliser divers modèles d'écoulement (Darcy, Darcy-Brinkman, Darcy-Forchheimer...) en fonction des phénomènes physiques que l'on souhaite considérer sans que cela modifie la démarche présentée par la suite.

La prise en compte de ces effets augmente la complexité de la prise de moyenne volumique, mais ne devrait pas influencer sur la démarche de couplage.

Annexe A

Publication soumise à la revue *Transport in Porous Media*

CETTE ANNEXE présente le texte d'un article intitulé « Coupled Upscaling Approaches For Conduction, Convection, and Radiation in Porous Media: Theoretical Developments » (LEROY et al., 2013). Il reprend les points exposés dans le chapitre 3 et couvre également les cas ST/ST et ST/T. Après une brève introduction par la section A.1, les problématiques posées par le couplage des modes de transfert sont posées dans la section A.2. La section A.3 présente succinctement le modèle statistique d'homogénéisation du rayonnement. La section A.4 décrit la procédure de changement d'échelle couplée et introduit les bilans macroscopiques homogénéisés pour les cas O/T, ST/ST et ST/T. La section A.5 présente quelques résultats numériques liés au modèle de couplage, que l'on retrouve au chapitre 4.



Coupled upscaling approaches for conduction, convection and radiation in porous media: theoretical developments

Vincent Leroy, Benoît Goyeau and Jean Taine

Abstract

This study deals with macroscopic modeling of heat transfer in porous media subjected to high temperature. The derivation of the macroscopic model, based on thermal non-equilibrium, includes coupling of radiation with the other heat transfer modes. In order to account for non-Beerian homogenized phases, the radiation model is based on the Generalized Radiation Transfer Equation (GRTE) and, under some conditions, on the radiative Fourier law.

The originality of the present upscaling procedure lies in the application of the volume averaging method to local energy conservation equations in which radiation transfer is included. This coupled homogenization mainly raises three challenges. First, the physical natures of the coupled heat transfer modes are different. We have to deal with the coexistence of both the material system (where heat conduction and/or convection take place) and the non-material radiation field composed of photons. This radiation field is homogenized using a statistical approach leading to the definition of radiation properties characterized by statistical functions continuously defined in the whole volume of the porous medium. The second difficulty concerns the different scales involved in the upscaling procedure. Scale separation, required by the volume averaging method, must be compatible with the characteristic length scale of the statistical approach. The third challenge lies in radiation emission modeling, which depends on the temperature of the material system. For a semi-transparent phase, this temperature is obtained by averaging the local-scale temperature using a radiation intrinsic average while a radiation interface average is used for an opaque phase.

This coupled upscaling procedure is applied to different combinations of opaque, transparent or semi-transparent phases. The resulting macroscopic models involve several effective transport properties which are obtained by solving closure problems derived from the local-scale physics.

Nomenclature

Roman symbols

A	Specific area of the porous medium
\mathcal{A}^m	Fluid-solid interface or interfacial area within \mathcal{V}^m
\mathcal{A}^R	Fluid-solid interface or interfacial area within \mathcal{V}^R
$\mathbf{b}_{\gamma_1\gamma_2}$	Closure variables for the deviation temperature fields (problems I and II)
$c_{p\gamma}$	Heat capacity per unit mass of the γ -phase
g_γ	Scattering asymmetry parameter
h	Effective heat transfer coefficient
I	Radiation intensity
$\mathbb{k}_{\gamma_1\gamma_2}$	Effective thermal diffusion-dispersion tensor
k	Thermal conductivity
L	Macroscopic system typical size
l_γ	Typical local-scale size of phase γ
n	Refractive index
$\mathbf{n}_{\gamma_1\gamma_2}$	Normal unit vector from the γ_1 -phase to the γ_2 -phase
P, \mathcal{P}	Energy generation rate per unit volume
$\mathbf{p}_\gamma, \mathbf{p}_{\gamma_1\gamma_2}$	Effective property associated with heterogeneities of the average radiative source term
\mathbf{q}	Energy flux vector
\mathbf{r}	Position vector
r^m	Size of the averaging volume
r^R	Size of the radiative averaging volume
r_γ	Closure variables for the deviation temperature fields (problem IV)
s, s'	Curvilinear abscissa along a ray
S	Source term in the GRTE
s_γ	Closure variables for the deviation temperature fields (problem III)
T	Temperature
$\mathbf{u}_{\gamma_1\gamma_2}$	Macroscopic pseudo-convective transport vector
\mathbf{u}	Direction unit vector
\mathcal{V}_γ^R	Volume of the γ -phase within \mathcal{V}^R
\mathcal{V}_γ^m	Volume of the γ -phase within \mathcal{V}^m
\mathbf{v}	Velocity

A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

\mathcal{V}^m	Averaging volume
\mathcal{V}^R	Radiative averaging volume

Greek symbols

α, α_γ	Coefficient relating the radiation source term to its average
B_γ	Generalized extinction coefficient at equilibrium
β_γ	Extinction coefficient at equilibrium
Π_γ	Volume fraction of the γ -phase
K	Generalized absorption coefficient at equilibrium
κ_γ	Absorption coefficient at equilibrium
λ	Wavelength
Σ_γ	Generalized scattering coefficient
σ_γ	Scattering coefficient
σ	Stefan-Boltzmann constant
φ	Energy flux
ρ_γ	Density
$\xi_\gamma, \xi_{\gamma_1\gamma_2}$	Macroscopic distribution coefficient
Θ	Homogenized temperature (radiation model)
ν	Radiation frequency

Subscripts

f	Fluid
s	Solid
w	Wall
t	Tomography
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$	General index for a phase (f, s or w)

Superscripts

eff	Effective
cd	Conductive
R	Radiative
sc	Scattering
ext	Extinction
e	Emission
a	Absorption
l	Leaving a boundary (radiation)
(j)	j -th perturbation order

Special notations

$\langle \cdot \rangle^m$	Superficial volume averaging operator
---------------------------	---------------------------------------

A.1. Introduction

$\langle \cdot \rangle^{\text{m}\gamma}$	Intrinsic volume averaging operator related to the γ -phase
$\langle \cdot \rangle^{\text{R}\gamma}$	Radiative intrinsic volume averaging operator related to the γ -phase
$\langle \cdot \rangle^{\cdot\varnothing^{\text{R}}}$	Radiative interfacial averaging operator
$\tilde{\cdot}$	Deviation

A.1 Introduction

This study concerns the derivation of a macroscopic model for heat transfer in porous media at high temperatures. The originality of this theoretical analysis lies in the coupling of upscaling approaches in order to account for both radiation and diffusion/convection. The present homogenization process, based on local thermal non-equilibrium, consists in applying the volume averaging method (Whitaker, 1999) to the local energy conservation equations where homogenized radiation heat transfer is included at the local scale (*i.e.* at scale equal to or smaller than the pore size). So far, homogenization procedures for radiation and diffusion/convection in porous media have been separately performed.

Homogenization of heat transfer in porous media in the absence of radiation has often been studied using the volume averaging method both in the context of local thermal equilibrium or local thermal non-equilibrium (Carbonell and Whitaker, 1984; Moyne, 1997; Quintard, Kaviany, et al., 1997; Quintard and Whitaker, 1993a, 2000). In the first case, upscaling energy conservation leads to the *averaged one-equation model* while the thermal non-equilibrium situation naturally gives rise to a *two-equation model* whose coupling between phases is described by interfacial exchange terms and effective transport properties. These latter are obtained by solving associated local closure problems and dispersion effects when convection is considered. Constant homogeneous and/or heterogeneous thermal sources have also been included (Quintard, Ladevie, et al., 2000; Whitaker, 1998) leading to an additional distribution coefficient for the heterogeneous thermal source. As shown in the next sections, including radiation actually leads to similar models, but in that case, the homogeneous and/or heterogeneous thermal sources are not constant.

Radiation in porous media has been the subject of a specific attention during the last decades and a first actual challenge consists in characterizing the homogenized porous media in terms of the averaged radiative properties. Most of the time, these properties are obtained using a parameter identification

A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

technique (Baillis and Sacadura, 2000). The emission and scattering coefficients of the porous medium are identified from experimental data, assuming that the homogenized radiative transfer can be modeled using a classical radiation transfer equation (RTE). The radiative characterization of the porous medium can now be based on a direct statistical homogenization; the microstructure of the solid matrix is then often taken into account from X- and γ -ray tomography data. The homogenized semi-transparent phase is accurately characterized from the chord distribution functions of the medium (Torquato and Lu, 1993). This method was first developed by Tancrez and Taine (Tancrez and Taine, 2004) and extensively used and further developed in numerous studies (Bellet et al., 2009; Chahlaoui et al., 2012; Haussener, Coray, et al., 2010; Haussener, Lipiński, Petrasch, et al., 2009; Haussener, Lipiński, Wyss, et al., 2010; Petrasch, Wyss, et al., 2007; Taine, Bellet, et al., 2010; Zeghondy et al., 2006b). A detailed review is provided by Taine and Iacona (Taine and Iacona, 2012) for statistically isotropic media. These statistical homogenization approaches can be applied to any microscopic morphology (isotropic or not) and, contrary to identification methods, are not limited to homogenized medium assumingly obeying Beer's laws (*i.e.* absorption, extinction and scattering have an exponential behavior).

An alternative method based on spatial averaging has been introduced by Consalvi et al., 2002 in order to derive a homogenized RTE for multiphase systems. This methodology has been improved by averaging in each phase giving rise to the conventional RTE. This model takes into account exchange of radiation between phases (Gusarov, 2008). A similar approach has been used by Lipiński, Keene, et al., 2010; Lipiński, Petrasch, et al., 2010 and by Petrasch, Haussener, et al., 2011 for semitransparent two-phase media.

The coupled homogenization procedure proposed in the present study mainly raises three difficulties. The first one is related to the different physical nature of radiation, which refers to a non-material field composed of photons, and conduction/convection, which take place in the material system. The radiation field is homogenized, in a rather general case, using a statistical approach leading to the definition of radiation properties characterized by continuous statistical functions defined in the whole system (cumulated extinction distribution function, cumulated absorption probability, cumulated scattering probability). In this general case, the homogenized phases are not Beerian and the radiation model is based on the Generalized Radiative Transfer Equation (GRTE) (Taine, Bellet, et al., 2010; Taine and Iacona, 2012) and on the radiative Fourier law under some validity conditions (Gomart and Taine, 2011).

A.2. Challenges of coupling

The second difficulty concerns the compatibility between the characteristic length scale of the statistical approach and the length scale constraints imposed by the volume averaging method. The third challenge lies in modeling of emission, which depends on the temperature of the material system. For a semi-transparent phase, this temperature is obtained by averaging the local-scale temperature using a *radiation intrinsic averaging operator*; for an opaque phase, a radiation interface average is used.

The present analysis only considers transfer phenomena in the core of the porous medium. Indeed, macroscopic modeling at the interface between a homogeneous and a porous medium is beyond its scope. The paper is organized as follows: first, the challenges we are facing the this coupled upscaling procedure are presented in Sect. A.2. Then, a generalized statistical radiation model is briefly described and applied for different combinations of opaque, transparent and semi-transparent phases (Sect. A.3). Sect. A.4 is dedicated to the coupled upscaling procedure, giving rise to the macroscopic governing equations and the closure problems associated with the effective transfer properties. Finally, Sect. A.5 presents the results of numerical calculations of effective properties.

A.2 Challenges of coupling

The porous medium under consideration is composed of a rigid solid matrix (index s) assumed to be statistically isotropic and uniform, saturated by a fluid (index f), the two phases composing the material system. The fluid (gas at ambient pressure) is motionless or not and the solid phase is subjected to high temperature. As previously mentioned, the present analysis aims at deriving a macroscopic model for non-equilibrium heat transfer including radiation. The originality of the present upscaling procedure lies in the fact that the volume averaging method (Whitaker, 1999) is applied to local conservation equations where the radiative transfer is taken into account after a statistical homogenization. In this context, we are facing a number of challenges.

One of the difficulties in upscaling these coupled transfer phenomena lies in their different physical natures. Indeed, in the problem under consideration, we have to deal with the coexistence of both the material system, where heat conduction and convection take place, and the non-material radiation field, composed of *photons*. This radiation field is homogenized using a statistical approach leading to the definition of the associated radiative properties. Note that these γ -phase radiative properties are *continuously* defined over the whole

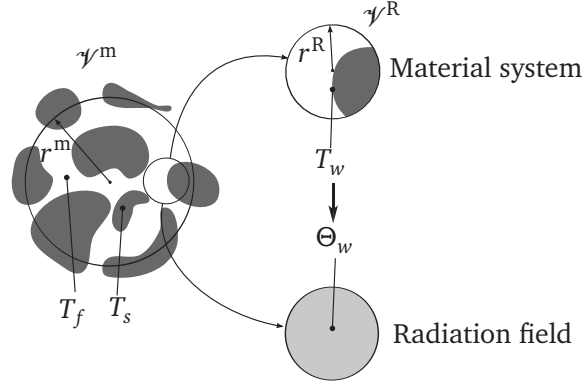


Figure A.1: Averaging volumes.

volume of the medium with a spatial resolution smaller than the pore size. It is important to recall that in the statistical approach, the different phases are not spatially separated, their existence being defined by a presence probability through the γ -phase volume fraction Π_γ . On the other hand, diffusion and convection in the pores are described by a *discrete* representation where conservation equations for each phase are coupled by fluid-solid interfacial boundary conditions. The derivation of an equivalent (continuous) macroscopic description taking into account this duality represents one of the major issues of the present analysis.

The second difficulty concerns the different scales involved in the upscaling procedure. Indeed, the volume averaging method is developed using an averaging volume \mathcal{V}^m (Fig. A.1) whose size r^m is assumed to satisfy scale separation given by the length scale constraints

$$l_f \ll r^m \ll L \quad (\text{A.1})$$

where l_f and L are the local and the macroscopic characteristic length scales, respectively. Obviously, these scales have to be compatible with the characteristic length scale of the radiation statistical approach.

Finally, the third challenge lies in the modeling of radiation emission which depends, at local thermodynamic equilibrium, on a temperature Θ_γ compatible with the statistical definition of the γ -phase used in the radiation modeling. For a *semi-transparent phase*, Θ_γ is obtained by averaging the local temperature T_γ



A.3. Homogenization of the radiation field

using the *radiative intrinsic average operator* (Fig. A.1)

$$\Theta_\gamma = \langle T_\gamma \rangle^{\mathcal{R}_\gamma} = \frac{1}{\mathcal{V}_\gamma^{\mathcal{R}}} \int_{\mathcal{V}_\gamma^{\mathcal{R}}} T_\gamma d\mathcal{V}, \quad (\text{A.2})$$

where $\mathcal{V}^{\mathcal{R}}$ is the *radiative averaging volume*, included in \mathcal{V}^{m} (Fig. A.1), while $\mathcal{V}_\gamma^{\mathcal{R}}$ is the part of $\mathcal{V}^{\mathcal{R}}$ occupied by the γ -phase in the material system. The characteristic length scale for Θ_γ is $r^{\mathcal{R}}$ (radius of $\mathcal{V}^{\mathcal{R}}$); its values are discussed in Sect. A.4.

For *opaque walls*, the homogenized wall temperature Θ_w is defined, using the *radiative interface average*, by

$$\Theta_w = \langle T_w \rangle^{\mathcal{A}^{\mathcal{R}}} = \frac{1}{\mathcal{A}^{\mathcal{R}}} \int_{\mathcal{A}^{\mathcal{R}}} T_w d\mathcal{A} \quad (\text{A.3})$$

where $\mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ is the part of the fluid-solid interface \mathcal{A}^{m} included in $\mathcal{V}^{\mathcal{R}}$, and T_w is the interface temperature.

A.3 Homogenization of the radiation field

For the sake of simplicity, the medium is assumed statistically isotropic, uniform and geometrical optics laws are assumed to be valid at any scale. Therefore, if l_f represents the pore size, the radiation wavelength λ must satisfy

$$\lambda \ll l_f. \quad (\text{A.4})$$

Diffraction phenomena are then negligible.

The radiation statistical model which is coupled to the material system model in Sect. A.4 has been given by Taine and Iacona (2012) and detailed by Tancrez and Taine (2004) and Taine, Bellet, et al. (2010). It is only briefly summarized here.

A.3.1 Principles of the radiation model

Any non-opaque γ -phase of the porous medium is fully characterized by effective radiative properties after homogenization.

If radiation extinction within a homogenized phase is characterized by an exponential law (case of a *Beerian medium*), these properties are extinction, scattering or absorption coefficients (β_γ , σ_γ or κ_γ respectively), and a phase



A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

function p_γ . All of these quantities are, in our model, determined using the Radiative Distribution Function Identification method (RDFI) (Tancrez and Taine, 2004). Coupled classical Radiative Transfer Equations (RTEs) associated with the different non opaque phases allow the radiative intensity fields $I_{\gamma,v}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ in all these phases to be computed.

In many cases, however, extinction within a homogenized phase is not characterized by an exponential law: the medium is then *non-Beerian*. It is commonly the case of statistically anisotropic porous media or even of some statistically isotropic (e.g. foams of intermediate porosity). Such homogenized phases are completely characterized, in our approach (Taine, Bellet, et al., 2010), by an extinction cumulated distribution function (G_γ^{ext}), an absorption or a scattering cumulated probability (P_γ^{sc} or P_γ^{a} respectively) and a phase function (p_γ). These quantities have been determined using the methods defined in previous studies (Haussener, Lipiński, Petrasch, et al., 2009; Haussener, Lipiński, Wyss, et al., 2010; Petrasch, Wyss, et al., 2007; Taine, Bellet, et al., 2010; Taine and Iacona, 2012; Tancrez and Taine, 2004; Zeghondy et al., 2006a). In that case, coupled Generalized Radiative Transfer Equations (GRTEs) associated with the different non opaque phases also allow the radiative intensity fields $I_{\gamma,v}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ to be computed. As a GRTE is directly expressed as a function of G_γ^{ext} , P_γ^{sc} and p_γ , a numerical Monte Carlo transfer model, based on cumulative distribution functions, does not require more computing time than in the case of a classical RTE (Taine, Bellet, et al., 2010).

The coupling method in the present paper can be applied to both Beerian and non-Beerian homogenized phases, by following the same procedure. Within any homogenized non-opaque phase γ (fluid or solid), the radiative energy generation rate *per unit volume of the medium* P_γ^{R} is given, at a point $M(\mathbf{r})$, by

$$\mathcal{P}_\gamma^{\text{R}}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\gamma^{\text{R}}, \quad (\text{A.5})$$

where $\mathbf{q}_\gamma^{\text{R}}$ is the radiative flux vector. This flux is a function of the radiative intensity field $I_{\gamma,v}$ in the γ -phase such that

$$\mathbf{q}_\gamma^{\text{R}}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \left(\int_{4\pi} \mathbf{u} I_{\gamma,v}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\Omega \right) dv, \quad (\text{A.6})$$

where v is the frequency and \mathbf{u} is the current unit vector.

The coupled transfer model is iterative. At iteration n , $\mathcal{P}_\gamma^{\text{R}(n)}$ and, if necessary, the radiative flux $\mathbf{q}_\gamma^{\text{R}(n)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ at an opaque wall, are computed



A.3. Homogenization of the radiation field

from the temperature fields issued, at iteration $n - 1$, from the energy balance equations of the phases and their boundary conditions. At iteration n , $P_\gamma^{R(n)}$ is then a source term of the γ phase energy balance equation and $\mathbf{q}_\gamma^{R(n)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ is a contribution to the boundary condition at any possible opaque interface. This scheme is applied in Sect. A.4.

In practice, a radiative Fourier law, also called diffusion approximation, can very often be applied to homogenized phases of a porous medium. Gomart and Taine (2011) have shown that this law is valid around a point $M(\mathbf{r})$ if two conditions are satisfied: a) The point $M(\mathbf{r})$ does not belong to a radiative boundary layer of the whole porous medium, *i.e.* is located at least at a distance greater than $l_b^R = 5/\kappa_\gamma^{\text{eff}}$ from any boundary of the porous medium; $\kappa_\gamma^{\text{eff}}$ is an effective absorption coefficient which accounts for multiple scattering. This first criterion ensures that the medium is optically thick in all directions. b) The temperature field $\Theta_\gamma(M)$ satisfies the second criterion

$$\frac{1}{\Theta_\gamma} \frac{d\Theta_\gamma}{dx} < \eta \kappa_\gamma^{\text{eff}}, \quad (\text{A.7})$$

where η depends on the desired accuracy on the result (Gomart and Taine, 2011). Eq. (A.7) has to be satisfied at any scale dx , starting from the finest one at which Θ_γ is defined. High temperature variations or discontinuities, for instance due to a flame front within the medium, therefore prevent the radiative Fourier law from being used in the whole medium.

The radiative Fourier law is a function of the temperature gradients within possibly coupled non-opaque phase. In the Beerian case, a perturbation technique of the RTE allows the radiative conductivity tensors to be expressed, from the refractive index n_γ , the extinction and scattering coefficients, β_γ and σ_γ , and the scattering asymmetry parameter g_γ of the phases (Taine, Bellet, et al., 2010; Taine and Iacona, 2012). This development is similar to the introduction of the classical thermal conductivity by a perturbation of the Boltzman equation in the continuous medium approach. For non-Beerian homogenized phases, generalized extinction and scattering coefficients at equilibrium, B_γ and Σ_γ , replace the classical extinction and absorption coefficients (Chahlaoui et al., 2012; Taine, Bellet, et al., 2010; Taine and Iacona, 2012). The perturbation development is carried out up to the first order, *i.e.*

$$\mathcal{P}_\gamma^R = \mathcal{P}_\gamma^{R(0)} + \mathcal{P}_\gamma^{R(1)} \quad (\text{A.8})$$

A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

where $\mathcal{P}_Y^{R(i)}$ is the i -th perturbation order. The zeroth-order term $\mathcal{P}_Y^{R(0)}$ represents the radiative exchanges within an elementary volume dV where each phase is assumed isothermal. It vanishes if only one of the two phases is absorbing. The first order term $\mathcal{P}_Y^{R(1)}$ is associated with exchanges between dV and adjacent volumes dV' .

At this point, it is worth discussing the spatial resolution of the radiation model. On the one hand, the spatial resolution of the radiative properties of extinction, absorption and scattering are mainly limited by the spatial scale l_t of the description of the medium, that is often the spatial resolution of an X- or γ -ray tomography. If the medium is analytically defined, geometrical information is available at any scale and l_t is only limited by the resolution of the computational model. These limitations are generally much smaller than the pore size.

On the other hand, radiation emission is based, at local thermodynamic equilibrium of matter, on the spatial resolution of the temperature field Θ_Y , which depends in practice on the matter modeling, as discussed in Sect. A.4. This spatial limitation is generally more restrictive and strongly depends on the couple of phases involved: opaque / transparent (O/T), semi-transparent / semi-transparent (ST/ST), semi-transparent / transparent (ST/T) or opaque / semi-transparent (O/ST). The first three cases are presented in the next section. The last O/ST case, more complex, is not addressed by this paper (see for instance (Chahlaoui et al., 2012)).

A.3.2 Considered couples of phases

Porous media with an opaque solid phase and a transparent fluid one (O/T) are encountered in many applications involving gases (Baillis and Sacadura, 2000; Haussener, Lipiński, Wyss, et al., 2010; Petrasch, Wyss, et al., 2007; Tancrez and Taine, 2004). Indeed, gases are generally considered optically transparent at the local scale and radiation transfer only occurs between the walls of the opaque solid matrix. The only homogenized propagation phase w is then characterized by a presence probability within the porous medium, *i.e.* porosity. It accounts for the statistical wall distribution in a given volume of the porous medium.

The radiative energy generation rate per unit volume \mathcal{P}_w^R in the propagation phase is determined using Eqs. (A.5) and (A.6). Since the propagation phase is in fact, transparent, it is physically more relevant to consider a radiative



A.3. Homogenization of the radiation field

isotropic homogenized flux φ_w^R at the fluid-solid interface, given by

$$\varphi_w^R = \frac{\mathcal{P}_w^R}{A}, \quad (\text{A.9})$$

where A stands for the interfacial area per unit volume of the porous medium. Computations of φ_w^R can be carried out from a RTE (or a GRTE) applied to the homogenized phase.

If the validity conditions of the Fourier law defined in Sect. A.3.1 are satisfied, $\mathcal{P}_w^{R(0)}$ is zero, since the fluid phase is transparent. An isotropic radiative conductivity k_w^R is introduced at the first perturbation order and φ_w^R becomes

$$\varphi_w^R = \frac{1}{A} \nabla \cdot [k_w^R(\Theta_w) \nabla \Theta_w], \quad (\text{A.10})$$

where the radiative conductivity k_w^R is a scalar, as the homogenized phase is statistically isotropic; k_w^R simply writes, if the homogenized phase is non-Beerian and gray (Taine, Bellet, et al., 2010),

$$k_w^R(\Theta_w) = \frac{16\pi}{3} \frac{\Pi_f}{B_w - \Sigma_w g_w} \sigma \Theta_w^3, \quad (\text{A.11})$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant and Π_f the volume fraction of the fluid phase. If the medium is Beerian, B_w and Σ_w are replaced by β_w and σ_w respectively. A generalization to a non-gray medium is given by Taine, Bellet, et al. (2010).

When both the solid and fluid phases are semi-transparent (ST/ST), two GRTEs (or RTEs), are coupled (Taine and Iacona, 2012; Zeghondy et al., 2006a). The obtained coupled intensity fields allow the radiative energy generation rate per unit volume given by Eq. (A.5) to be determined in each phase.

When the validity conditions of the Fourier law, given in Sect. A.3.1, are satisfied, the perturbation zeroth-order contribution to the radiative energy generation rate per unit volume is given, for gray phases for simplicity, by

$$\mathcal{P}_f^{R(0)} = -\mathcal{P}_s^{R(0)} = \frac{\Pi_f n_f^2 K_f K_s \Sigma_{fs}}{K_f K_s + K_f \Sigma_{sf} + K_s \Sigma_{fs}} \sigma (\Theta_s^4 - \Theta_f^4), \quad (\text{A.12})$$

where Θ_f and Θ_s are the homogenized temperatures given by Eq. (A.2). Σ_{sf} is the partial scattering coefficient associated with radiation that is scattered from the homogenized phase s to the homogenized phase f (transmitted at the





A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

local scale from the s phase to the f phase). Eq. (A.12) represents the power exchanged between the phases within an elementary volume dV of the porous medium.

The first-order contributions account for radiative exchanges between dV and the adjacent volume elements, within the same phase and between the two phases, *i.e.*

$$\mathcal{P}_\gamma^{R(1)} = \nabla \cdot \left(k_{\gamma f}^R \nabla \Theta_f + k_{\gamma s}^R \nabla \Theta_s \right) \quad \gamma = f, s. \quad (\text{A.13})$$

The partial conductivities $k_{\gamma f}^R$ and $k_{\gamma s}^R$ are numerically determined using a procedure similar to the approach of Chahlaoui et al. (2012). It is worth noticing that the zeroth-order term is generally dominant (Chahlaoui et al., 2012).

A porous medium with a transparent fluid phase and an opaque solid one (O/T) has often been considered in previous studies (Baillis and Sacadura, 2000; Haussener, Lipiński, Petrasch, et al., 2009; Zeghondy et al., 2006a). The associated model is deduced from the ST/ST case by considering that the homogenized fluid phase does not emit or absorb, but only scatters radiation (Taine and Iacona, 2012). The GRTE (or RTE) for the solid phase remains unchanged. When the validity conditions of the Fourier law given in Sect. A.3.1 are satisfied, $\mathcal{P}_f^{R(0)}$, $\mathcal{P}_s^{R(0)}$ and $\mathcal{P}_f^{R(1)}$ are zero, since emission and absorption only occur within the solid phase. Therefore, the only contribution is

$$\mathcal{P}_s^{R(1)} = \nabla \cdot \left(k_s^R \nabla \Theta_s \right). \quad (\text{A.14})$$

In Eq. (A.14), the value of k_s^R is strongly influenced by the scattering properties associated with the transparent fluid phase, especially at high porosity.

A.4 Macroscopic modeling

This section is dedicated to the coupling of the radiative transfer model with an upscaling model for energy transport in matter based on the volume averaging method (Whitaker, 1999). As previously mentioned, this upscaling method requires the scale separation given by Eq. (A.1). More accurately, the use of the spatial averaging theorems and the simplifications associated with the spatial decomposition in the averaging procedure leads to the following form of the length-scale constraints (Whitaker, 1999)

$$l_f, l_s \ll r^m, \quad (\text{A.15})$$

$$(r^m)^2 \ll L^2, \quad (\text{A.16})$$



A.4. Macroscopic modeling

where the characteristic length scales of the fluid l_f and solid l_s phases within the averaging volume are generally assumed to be of the same order of magnitude. Let us recall that these length-scale constraints have been written assuming that conduction and convection within phases at the pore scale are based on the continuum approach (the mean free path smaller than l_f, l_s).

For conciseness, the volume averaging procedure is not detailed in the present section where only the main steps are described and where our attention is focused on the radiation contribution in the derivation of the macroscopic model. Details regarding the volume averaging method applied to heat transfer with thermal non equilibrium are provided by Quintard and Whitaker (1993a) and Quintard and Whitaker (2000). Let us just recall that this upscaling method consists in applying the averaging operator

$$\langle \Psi_\gamma \rangle^m = \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{V}_\gamma^m} \Psi_\gamma d\mathcal{V}, \quad (\text{A.17})$$

to the different terms of the local conservation equations. In Eq. (A.17), $\langle \Psi_\gamma \rangle^m$ is the superficial average of the generic quantity Ψ_γ in the γ -phase. The introduction of the intrinsic average

$$\langle \Psi_\gamma \rangle^{m\gamma} = \frac{1}{\mathcal{V}_\gamma^m} \int_{\mathcal{V}_\gamma^m} \Psi_\gamma d\mathcal{V} \quad (\text{A.18})$$

is also required. The intrinsic and superficial averages are related by

$$\langle \Psi_\gamma \rangle^m = \Pi_\gamma \langle \Psi_\gamma \rangle^{m\gamma} \quad (\text{A.19})$$

where Π_γ is the volume fraction of the γ -phase. The volume averaging method requires the application of the following averaging theorems:

$$\langle \nabla \Psi_\gamma \rangle^m = \nabla \langle \Psi_\gamma \rangle^m + \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \Psi_\gamma d\mathcal{A}, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A}_\gamma \rangle^m = \nabla \cdot \langle \mathbf{A}_\gamma \rangle^m + \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{A}_\gamma d\mathcal{A}, \quad (\text{A.21})$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi_\gamma}{\partial t} \right\rangle^m = \frac{\partial \langle \Psi_\gamma \rangle^m}{\partial t} - \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{w}_{fs} \Psi_\gamma d\mathcal{A}, \quad (\text{A.22})$$

where \mathbf{A}_γ is a generic vector quantity and \mathbf{w}_{fs} is the velocity of the fluid-solid interface. Furthermore, this upscaling method requires at different levels the



A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

introduction of the spatial decomposition (Gray, 1975)

$$\Psi_\gamma = \langle \Psi_\gamma \rangle^{\text{m}\gamma} + \tilde{\Psi}_\gamma \quad (\text{A.23})$$

where $\tilde{\Psi}_\gamma$ represents the deviation of Ψ_γ in the γ -phase. In order to include radiative transfer in this averaging procedure, it is first necessary to verify the compatibility of these length scale constraints with the local spatial resolution used for the radiation model at the local scale. As mentioned before, this compatibility is obtained when the tomography resolution l_t of the local structure of the porous medium satisfies

$$l_t \ll l_f. \quad (\text{A.24})$$

It is worth mentioning that the homogenized temperature Θ_γ , given by Eq. (A.2) or (A.3), has a resolution of the order of magnitude of the size r^R of the radiative averaging volume \mathcal{V}^R . r^R has to be chosen as small as possible to guarantee the best tracking of the variations of Θ_γ ; its minimal size is the one which guarantees the inclusion of a representative element (regarding radiation) of the γ -phase in \mathcal{V}^R . In macroscopic 1D configurations, Θ_γ is constant over planes; in macroscopic 2D configurations, it is constant over lines. In these two cases, r^R is therefore close to l_t . In macroscopic 3D configurations, the Θ_γ field does not feature any spatial invariance and r^R is close to l_f . In the following sections, the coupled upscaling procedure is applied for different combinations of opaque, transparent or semi-transparent phases.

A.4.1 The opaque / transparent (O/T) case

The local equations for energy conservation for the fluid and the solid phases are, respectively

$$(\rho_f c_{pf}) \left(\frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) \quad \text{within } \mathcal{V}_f^{\text{m}}, \quad (\text{A.25})$$

$$(\rho_s c_{ps}) \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) \quad \text{within } \mathcal{V}_s^{\text{m}}. \quad (\text{A.26})$$

These equations are associated with the boundary conditions at the fluid-solid interface \mathcal{A}^{m}

$$T_f = T_s \quad \text{at } \mathcal{A}^{\text{m}}, \quad (\text{A.27})$$

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla T_f + \varphi_w^R = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla T_s \quad \text{at } \mathcal{A}^{\text{m}}, \quad (\text{A.28})$$



A.4. Macroscopic modeling

where \mathbf{n}_{fs} is the interfacial normal vector oriented from the fluid phase to the solid phase, and φ_w^R is a *homogenized isotropic radiative flux*. If the validity conditions of Fourier's law are satisfied, φ_w^R is given by Eq. (A.10). Otherwise, it is obtained from Eqs. (A.5), (A.6) and (A.9) by using the GRTE (Taine, Bellet, et al., 2010). Let us recall that φ_w^R strongly depends on the temperature Θ_w through the emission source term (Taine and Iacona, 2012). If the macroscopic system does not feature any invariance, the three dimensional spatial variations of Θ_w are accurately represented by considering \mathcal{V}^R as small as possible, but large enough to include of a fluid/solid interface element. This is generally satisfied if r^R is of the same order of magnitude as l_γ ($\gamma = f, s$). It is worth noticing that the definition of the Θ_w field makes the resolution of the energy conservation numerical and iterative.

Assuming that the scale separation given by Eqs. (A.15) and (A.16) is satisfied, the application of the averaging theorems to Eqs. (A.25) and (A.26) leads to the non-closed averaged conservation equations for both the fluid and solid phases

$$\begin{aligned} & \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \frac{\partial \langle T_f \rangle^{mf}}{\partial t} + \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\ & + (\rho_f c_{pf}) \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{T}_f \rangle^m \\ & = \Pi_f \nabla \cdot (k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot \left(\frac{k_f}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \tilde{T}_f d\mathcal{A} \right) \\ & + \frac{k_f}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f d\mathcal{A}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} & \Pi_s (\rho_s c_{ps}) \frac{\partial \langle T_s \rangle^{ms}}{\partial t} \\ & = \Pi_s \nabla \cdot (k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + \nabla \cdot \left(\frac{k_s}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \tilde{T}_s d\mathcal{A} \right) \\ & + \frac{k_s}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

At this stage, note that Eqs. (A.29) and (A.30) are identical to those provided in the absence of radiation (Quintard, Kaviany, et al., 1997; Quintard and Whitaker, 2000). In order to derive a closed form of these equations, the deviations of the temperature fields \tilde{T}_γ ($\gamma = l, s$) have to be written in terms of intrinsic averaged quantities. This is achieved by the derivation of associated closure problems, the first step consisting in deriving deviation problems.



A.4.1.1 Deviation problems

The deviation equations are obtained by subtracting the non-closed macroscopic equations (Eqs. (A.29) and (A.30)), divided by the porosity Π_f , from the local equations (Eqs. (A.25) and (A.26)) in which the spatial decomposition (Eq. (A.23)) is introduced. Under the quasi-stationary assumption (Whitaker, 1999), the temperature deviation equation for the fluid phase takes the form

$$\begin{aligned} & (\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \tilde{T}_f + (\rho_f c_{pf}) \tilde{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\ & = k_f \nabla^2 \tilde{T}_f - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f \, d\mathcal{A} \quad \text{within } \mathcal{V}_f^m. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Similarly, the temperature deviation equation for the solid phase is

$$0 = k_s \nabla^2 \tilde{T}_s - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s \, d\mathcal{A} \quad \text{within } \mathcal{V}_s^m. \quad (\text{A.32})$$

Use of the spatial decomposition (A.23) in boundary condition (A.27) leads to

$$\tilde{T}_f = \tilde{T}_s + (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) \quad \text{at } \mathcal{A}^m. \quad (\text{A.33})$$

As intensity, radiative source terms or other radiative quantities associated with the energy generation rate, φ_w^R is continuously defined over the volume of the whole medium. It can be decomposed under the form

$$\varphi_w^R = \langle \varphi_w^R \rangle^m + \tilde{\varphi}_w^R. \quad (\text{A.34})$$

Under these circumstances, the deviation form of the boundary condition given by Eq. (A.28) becomes

$$\begin{aligned} & -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \tilde{T}_f + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \tilde{T}_s + \tilde{\varphi}_w^R \\ & = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - \langle \varphi_w^R \rangle^m \quad \text{at } \mathcal{A}^m \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

where $\tilde{\varphi}_w^R$ has the same spatial resolution as Θ_w .

A.4.1.2 Closure

At this stage, we need to express the radiative flux deviation $\tilde{\varphi}_w^R$ as a function of $\langle \varphi_w^R \rangle^m$. Let us assume that

$$\tilde{\varphi}_w^R = \alpha \langle \varphi_w^R \rangle^m \quad (\text{A.36})$$



A.4. Macroscopic modeling

where α is *not* a closure variable since it implicitly depends on Θ_w , itself resulting from the local temperature T_f and T_s . Note that the treatment required for φ_w^R is actually similar to closure associated with problems involving heterogeneous reactions (Valdés-Parada, Goyeau, et al., 2006; B. D. Wood et al., 2000). The introduction of Eq. (A.36) into the boundary condition (A.35) yields

$$\begin{aligned} & -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \tilde{T}_f + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \tilde{T}_s \\ & = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - (1 + \alpha) \langle \varphi_w^R \rangle^m \quad \text{at } \mathcal{A}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Therefore, the deviation problem, where Eq. (A.35) has been replaced by Eq. (A.37), suggests to write the deviation temperature fields under the form

$$\tilde{T}_f = \mathbf{b}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + \mathbf{b}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} + s_f (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) + r_f \langle \varphi_w^R \rangle^m, \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{T}_s = \mathbf{b}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + \mathbf{b}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - s_s (\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms}) + r_s \langle \varphi_w^R \rangle^m, \quad (\text{A.39})$$

where \mathbf{b}_{ff} , \mathbf{b}_{fs} , s_f and r_f are the closure variables associated with the fluid phase and \mathbf{b}_{sf} , \mathbf{b}_{ss} , s_s and r_s those associated with the solid phase. This decomposition is close to the one proposed for a constant interfacial source term (Quintard and Whitaker, 2000). In the present case, the closure variables r_f and r_s are associated with the non-constant radiative source.

The introduction of expressions (A.38) and (A.39) into the deviation problem provides four closure problems associated with the closure variables $\mathbf{b}_{\gamma_1, \gamma_2}$, s_γ , and r_γ , the first three being presented by Quintard, Kaviany, et al. (1997) with the same symbols (see Sect. 3 of this reference). For conciseness, we only consider here the derivation of the closure problem associated with the radiative closure variables r_f and r_s . This latter takes the following form:

Problem IV

$$\begin{aligned} (\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla r_f &= k_f \nabla^2 r_f \\ &\quad - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_f \, d\mathcal{A} \quad \text{within } \mathcal{V}_f^m \end{aligned} \quad (\text{A.40a})$$

$$0 = k_s \nabla^2 r_s - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_s \, d\mathcal{A} \quad \text{within } \mathcal{V}_s^m \quad (\text{A.40b})$$

$$r_f = r_s \quad \text{at } \mathcal{A}^m \quad (\text{A.40c})$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla r_f = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla r_s + 1 + \alpha \quad \text{at } \mathcal{A}^m \quad (\text{A.40d})$$

A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

$$r_f(\mathbf{r} + l_i) = r_f(\mathbf{r}) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.40e})$$

$$r_s(\mathbf{r} + l_i) = r_s(\mathbf{r}) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.40f})$$

$$\langle r_f \rangle^{mf} = 0 \quad (\text{A.40g})$$

$$\langle r_s \rangle^{ms} = 0 \quad (\text{A.40h})$$

The validity of the periodic boundary conditions (A.40e) and (A.40f) has already been discussed by Quintard and Whitaker (1993b, 1994): They are valid for periodic unit cells and for disordered media where the scale separation constraint is satisfied.

The solution of closure problem IV is the original point of the method. It is important to note that this closure problem depends on α , itself depending on the local temperature fields T_f and T_s . Consequently, the solution of closure problem IV depends on the solution of the macroscopic conservation equations (see the following section). Therefore, the resolution of the coupled problem requires to follow an iterative sequence (see Fig. A.2):

1. Closure problems I, II and III are solved.
2. Closure problem IV is solved for initialization. Since this step is performed with $\alpha = 0$, the solution does not depend on the macroscopic fields.
3. Effective properties are computed from the solutions of closure problems I-IV. The macroscopic radiation flux field $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ is initialized using a macroscopic approximate calculation.
4. Closed macroscopic energy equations (A.64) and (A.69) (see the following section) are solved.
5. Local temperature fields $T_f(\mathbf{r})$ and $T_s(\mathbf{r})$ are computed in a volume $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, centered at \mathbf{x} . The decomposition $T_\gamma(\mathbf{r}) = \langle T_\gamma \rangle^{m\gamma}(\mathbf{r}) + \tilde{T}_\gamma(\mathbf{r})$ and Eqs. (A.38) and (A.39) can be used. $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ must be optically thick and can be bigger than the averaging volume $\mathcal{V}^m(\mathbf{x})$. Θ_w is then computed over $\mathcal{V}(\mathbf{x})$.
6. Radiative transfer is computed, using the appropriate method (GRTE, degenerated GRTE, radiative Fourier law). This yields the φ_w^R field, its average $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ and the α field.
7. Closure problem IV is solved using the new value of the α field.

A.4. Macroscopic modeling

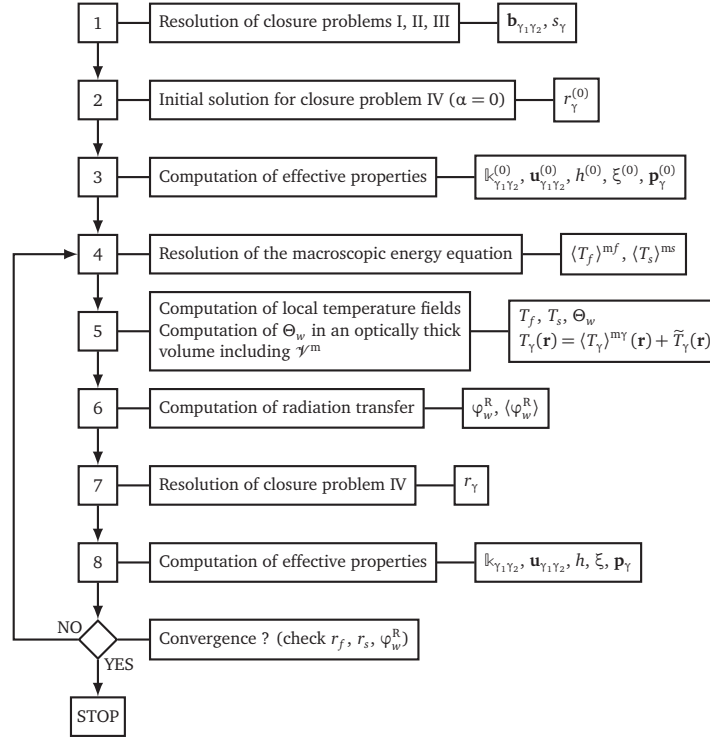


Figure A.2: Flowchart of the iterative sequence.

8. Effective properties are computed from the solutions of closure problems I-IV.

Steps 4 to 8 are repeated until convergence of r_f , r_s and φ_w^m is reached.



A.4.1.3 Closed form

The averaged equations are closed by introducing closure relations (A.38) and (A.39) into Eqs. (A.29) and (A.30). For the fluid phase, this yields

$$\begin{aligned}
 & \Pi_f \left(\rho_f c_{pf} \right) \frac{\partial \langle T_f \rangle^{mf}}{\partial t} + \Pi_f \left(\rho_f c_{pf} \right) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\
 & \quad - \mathbf{u}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \\
 & = \nabla \cdot \left(\mathbb{k}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbb{k}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \right) + Ah \left(\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf} \right) \\
 & \quad + A \xi_f \langle \varphi_w^R \rangle^m + \nabla \cdot \left(A \mathbf{p}_f \langle \varphi_w^R \rangle^m \right)
 \end{aligned} \tag{A.41}$$

where

$$A \xi_f = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_f \, d\mathcal{A}, \tag{A.42}$$

$$A \mathbf{p}_f = \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} r_f \, d\mathcal{A} - \rho_f c_{pf} \langle \tilde{v}_f r_f \rangle^m, \tag{A.43}$$

are the effective transport properties associated with radiation heat transfer. The other transport properties are more classical and their expressions are given by Quintard, Kaviany, et al. (1997) (see Sect. 3 of this reference). Similarly, the closed form of the macroscopic transport equation for the solid phase is given by

$$\begin{aligned}
 & \Pi_s \left(\rho_s c_{ps} \right) \frac{\partial \langle T_s \rangle^{ms}}{\partial t} - \mathbf{u}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \\
 & = \nabla \cdot \left(\mathbb{k}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbb{k}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \right) + Ah \left(\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms} \right) \\
 & \quad + A \xi_s \langle \varphi_w^R \rangle^m + \nabla \cdot \left(A \mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m \right)
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

Therefore, the effective transport properties associated with radiation are such that

$$A \xi_s = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_s \, d\mathcal{A}, \tag{A.45}$$

$$A \mathbf{p}_s = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} r_s \, d\mathcal{A}. \tag{A.46}$$

The fourth term in Eqs. (A.41) and (A.44) (associated with ξ_γ) stands for the spatial distribution of the macroscopic volumetric source term due to the



A.4. Macroscopic modeling

radiative flux. In expressions (A.42) and (A.45), the scalars ξ_γ ($\gamma = f, s$) are analogous to the *distribution coefficient* introduced by Quintard and Whitaker (2000). A major difference, due to the presence of a non-zero α coefficient in boundary condition (A.37), is that $\xi_f + \xi_s$ does not equal 1:

$$\begin{aligned} A(\xi_f + \xi_s) &= \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla (r_f - r_s) \, d\mathcal{A} \\ &= \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} 1 + \alpha \, d\mathcal{A} \\ &= A + \frac{1}{\mathcal{V}^m} \int_{\mathcal{A}^m} \alpha \, d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$\int_{\mathcal{A}^m} \alpha \, d\mathcal{A}$ will be zero only if the α is symmetric over the averaging volume.

The fifth term on the right-hand side of Eqs. (A.41) and (A.44) (associated with \mathbf{p}_γ) represents a macroscopic contribution due to the heterogeneities of the average radiative flux at the fluid/solid interface. It includes coupling effects at the local scale between diffusion, convection (through dispersion) and radiation as well as tortuosity effects. The expressions of the vectors \mathbf{p}_γ are similar with those of the diffusion-dispersion tensors $\mathbb{k}_{\gamma_1\gamma_2}$. The associated macroscopic terms include diffusive and tortuous effects; however, they cannot be interpreted as macroscopic diffusive contributions.

Let us remark that if $\tilde{\varphi}_w^R$ is negligible compared to $\langle \varphi_w^R \rangle^m$, α becomes negligible compared to 1 and problem IV degenerates into a form identical to the one presented by Quintard and Whitaker (2000).

A.4.2 The semi-transparent / semi-transparent (ST/ST) case

Let us consider the case where both phases are semi-transparent. Although less common than the O/T case, this case is interesting because of the symmetry between the phases involved. The radiative energy generation rate is introduced as a volumetric source term in both the fluid and solid local governing equations, yielding respectively

$$(\rho_f c_{pf}) \left(\frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + P_f^R \quad \text{within } \mathcal{V}_f^m, \quad (\text{A.48})$$

$$(\rho_s c_{ps}) \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + P_s^R \quad \text{within } \mathcal{V}_s^m, \quad (\text{A.49})$$



A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

where P_γ^R ($\gamma = f, s$) is the energy generation rate provided by the GRTE (denoted \mathcal{P}_γ^R) and divided by phase volume fraction Π_γ . The associated boundary conditions are

$$T_f = T_s \quad \text{at } \mathcal{A}^m, \quad (\text{A.50})$$

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla T_f = -\mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla T_s \quad \text{at } \mathcal{A}^m. \quad (\text{A.51})$$

The application of the averaging theorems on Eqs. (A.48) and (A.49) gives rise to the following two non-closed averaged equations

$$\begin{aligned} \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \frac{\partial \langle T_f \rangle^{mf}}{\partial t} + \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + (\rho_f c_{pf}) \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{T}_f \rangle^m \\ = \Pi_f \nabla \cdot (k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot \left(\frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \tilde{T}_f \, d\mathcal{A} \right) \\ + \frac{k_f}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f \, d\mathcal{A} + \Pi_f \langle P_f^R \rangle^{mf}, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} \Pi_s (\rho_s c_{ps}) \frac{\partial \langle T_s \rangle^{ms}}{\partial t} = \Pi_s \nabla \cdot (k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + \nabla \cdot \left(\frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \tilde{T}_s \, d\mathcal{A} \right) \\ + \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s \, d\mathcal{A} + \Pi_s \langle P_s^R \rangle^{ms}, \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

where the last terms, $\Pi_f \langle P_f^R \rangle^{mf}$ and $\Pi_s \langle P_s^R \rangle^{ms}$, are the upscaled energy generation rate in the respective phases.

A.4.2.1 Deviation problem

The deviation problem is obtained as in Sect. A.4.1.1. For the fluid phase, the deviation equation takes the form

$$\begin{aligned} (\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \tilde{T}_f + (\rho_f c_{pf}) \tilde{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\ = k_f \nabla^2 \tilde{T}_f - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f \, d\mathcal{A} + \tilde{P}_f^R \quad \text{within } \gamma_f^m, \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

while for the solid phase, we have

$$0 = k_s \nabla^2 \tilde{T}_s - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s \, d\mathcal{A} + \tilde{P}_s^R \quad \text{within } \gamma_s^m. \quad (\text{A.55})$$



A.4. Macroscopic modeling

Use of the spatial decomposition in the boundary conditions (A.51) and (A.50) leads to an equation identical to Eq. (A.33), and to the boundary condition

$$-\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \tilde{T}_f + \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \tilde{T}_s = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \quad \text{at } \mathcal{A}^m. \quad (\text{A.56})$$

A.4.2.2 Closure

As in the O/T case, the deviation terms need to be expressed as functions of the macroscopic source terms. Following the approach adopted in Sect. A.4.1.2, \tilde{P}_γ^R ($\gamma = f, s$) is expressed as a function of $\langle P_\gamma^R \rangle^{m\gamma}$ such that

$$\tilde{P}_\gamma^R = \alpha_\gamma \langle P_\gamma^R \rangle^{m\gamma}. \quad (\text{A.57})$$

This expression is introduced in Eqs. (A.54) and (A.55) to obtain

$$\begin{aligned} & (\rho_f c_{pf}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla \tilde{T}_f + (\rho_f c_{pf}) \tilde{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\ &= k_f \nabla^2 \tilde{T}_f - \frac{k_f}{\mathcal{V}_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \tilde{T}_f \, d\mathcal{A} + \alpha_f \langle P_f^R \rangle^{mf} \quad \text{within } \mathcal{V}_f^m \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

and

$$0 = k_s \nabla^2 \tilde{T}_s - \frac{k_s}{\mathcal{V}_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla \tilde{T}_s \, d\mathcal{A} + \alpha_s \langle P_s^R \rangle^{ms} \quad \text{within } \mathcal{V}_s^m \quad (\text{A.59})$$

Here, the deviation problem involves the two additional source terms $\langle P_f^R \rangle^{mf}$ and $\langle P_s^R \rangle^{ms}$. This suggests the following form for the temperature deviations

$$\begin{aligned} \tilde{T}_f &= \mathbf{b}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + \mathbf{b}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} + s_f \left(\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf} \right) \\ &\quad + r_{ff} \langle P_f^R \rangle^{mf} + r_{fs} \langle P_s^R \rangle^{ms}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s &= \mathbf{b}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} + \mathbf{b}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} - s_s \left(\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms} \right) \\ &\quad + r_{sf} \langle P_f^R \rangle^{mf} + r_{ss} \langle P_s^R \rangle^{ms}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

The introduction of expressions (A.60) and (A.61) in the deviation problem leads to five closure problems. Those associated with the first three closure variables are identical to problems I, II and III already derived in Sect. A.4.1.2. Closure problems IV and V for variables r_{ff} , r_{fs} , r_{sf} and r_{ss} are provided below.



A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

Problem IV

$$\begin{aligned} (\rho_f c_{p_f}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla r_{ff} &= k_f \nabla^2 r_{ff} \\ &\quad - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_{ff} \, d\mathcal{A} + \alpha_f \quad \text{within } \mathcal{V}_f^m \end{aligned} \quad (\text{A.62a})$$

$$0 = k_s \nabla^2 r_{sf} - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_{sf} \, d\mathcal{A} \quad \text{within } \mathcal{V}_s^m \quad (\text{A.62b})$$

$$r_{ff} = r_{sf} \quad \text{at } \mathcal{A}^m \quad (\text{A.62c})$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla r_{ff} = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla r_{sf} \quad \text{at } \mathcal{A}^m \quad (\text{A.62d})$$

$$r_{ff}(\mathbf{r} + l_i) = r_{ff}(\mathbf{r}) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.62e})$$

$$r_{sf}(\mathbf{r} + l_i) = r_{sf}(\mathbf{r}) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.62f})$$

$$\langle r_{ff} \rangle^{mf} = 0 \quad (\text{A.62g})$$

$$\langle r_{sf} \rangle^{ms} = 0 \quad (\text{A.62h})$$

Problem V

$$\begin{aligned} (\rho_f c_{p_f}) \mathbf{v}_f \cdot \nabla r_{fs} &= k_f \nabla^2 r_f \\ &\quad - \frac{k_f}{\gamma_f^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_{fs} \, d\mathcal{A} \quad \text{within } \mathcal{V}_f^m \end{aligned} \quad (\text{A.63a})$$

$$0 = k_s \nabla^2 r_{ss} - \frac{k_s}{\gamma_s^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} \cdot \nabla r_{ss} \, d\mathcal{A} + \alpha_s \quad \text{within } \mathcal{V}_s^m \quad (\text{A.63b})$$

$$r_{fs} = r_{ss} \quad \text{at } \mathcal{A}^m \quad (\text{A.63c})$$

$$\mathbf{n}_{fs} \cdot k_f \nabla r_{fs} = \mathbf{n}_{fs} \cdot k_s \nabla r_{ss} \quad \text{at } \mathcal{A}^m \quad (\text{A.63d})$$

$$r_{fs}(\mathbf{r} + l_i) = r_f(\mathbf{r}) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.63e})$$

$$r_{ss}(\mathbf{r} + l_i) = r_s(\mathbf{r}) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.63f})$$

$$\langle r_{fs} \rangle^{mf} = 0 \quad (\text{A.63g})$$

$$\langle r_{ss} \rangle^{ms} = 0 \quad (\text{A.63h})$$

Comments made in the previous section also apply for these closure problems. The resolution sequence is the same as in the O/T case (see Sect. A.4.1.2).



A.4. Macroscopic modeling

A.4.2.3 Closed form

The averaged equations are closed by introducing the closure relations (A.60) and (A.61) into Eqs. (A.52) and (A.53). The closed form for the fluid phase is

$$\begin{aligned}
& \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \frac{\partial \langle T_f \rangle^{mf}}{\partial t} + \Pi_f (\rho_f c_{pf}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^{mf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} \\
& - \mathbf{u}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \\
& = \nabla \cdot (\mathbb{k}_{ff} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbb{k}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + Ah (\langle T_s \rangle^{ms} - \langle T_f \rangle^{mf}) \\
& + \Pi_f \langle P_f^R \rangle^{mf} - \xi_{sf} \langle P_f^R \rangle^{mf} + \xi_{fs} \langle P_s^R \rangle^{ms} \\
& + \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{p}_{ff} \langle P_f^R \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{p}_{fs} \langle P_s^R \rangle^{ms})
\end{aligned} \tag{A.64}$$

where the effective properties associated with radiation transfer are given by

$$\xi_{sf} = -\frac{k_f}{\gamma_m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_{ff} d\mathcal{A} = \frac{k_s}{\gamma_m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_{sf} d\mathcal{A}, \tag{A.65}$$

$$\xi_{fs} = \frac{k_f}{\gamma_m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_{fs} d\mathcal{A} = -\frac{k_s}{\gamma_m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla r_{ss} d\mathcal{A}, \tag{A.66}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{p}_{ff} = \frac{k_f}{\gamma_m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} r_{ff} d\mathcal{A} - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f r_{ff} \rangle^m, \tag{A.67}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{p}_{fs} = \frac{k_f}{\gamma_m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{fs} r_{fs} d\mathcal{A} - (\rho_f c_{pf}) \langle \tilde{\mathbf{v}}_f r_{fs} \rangle^m, \tag{A.68}$$

Similarly, we have, for the solid phase,

$$\begin{aligned}
& \Pi_s (\rho_s c_{ps}) \frac{\partial \langle T_s \rangle^{ms}}{\partial t} - \mathbf{u}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf} - \mathbf{u}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms} \\
& = \nabla \cdot (\mathbb{k}_{sf} \cdot \nabla \langle T_f \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbb{k}_{ss} \cdot \nabla \langle T_s \rangle^{ms}) + Ah (\langle T_f \rangle^{mf} - \langle T_s \rangle^{ms}) \\
& + \Pi_s \langle P_s^R \rangle^{ms} + \xi_{sf} \langle P_f^R \rangle^{mf} - \xi_{fs} \langle P_s^R \rangle^{ms} \\
& + \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{p}_{sf} \langle P_f^R \rangle^{mf}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{p}_{ss} \langle P_s^R \rangle^{ms})
\end{aligned} \tag{A.69}$$



A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

where the additional effective transport properties associated with radiation are

$$A\mathbf{p}_{sf} = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} r_{sf} d\mathcal{A}, \quad (\text{A.70})$$

$$A\mathbf{p}_{ss} = \frac{k_s}{\gamma^m} \int_{\mathcal{A}^m} \mathbf{n}_{sf} r_{ss} d\mathcal{A}. \quad (\text{A.71})$$

The last five terms on the right-hand side of Eq. (A.64) and Eq. (A.69) are macroscopic radiative source terms. The first one represents the phase repartition of the radiative energy generation rate. Provided that the conditions of an optically thick medium are satisfied, and according to Eq. (A.8), this radiative source can be decomposed into zeroth- and first-order contributions. The zeroth order corresponds to the radiative exchange between phases due to radiation (Eq. (A.12)) while the first-order contribution stands for a diffusive inter-phase interaction (Eq. (A.13)) originating from radiation. The second and the third terms represent the macroscopic phase exchange where the scalars $\xi_{\gamma_1\gamma_2}$ distribute a part of the macroscopic radiative energy generation rate from a phase to the other. It is interesting to note that because of its nature, the expressions for $\xi_{\gamma_1\gamma_2}$ given by Eq. (A.64) and Eq. (A.69) are similar to the expression of the heat transfer coefficient h provided by Quintard, Kaviany, et al. (1997) (see Sect. 3 of this reference). The same observation can be made for the last two terms where the vectors $\mathbf{p}_{\gamma_1\gamma_2}$ contain contributions associated with both the tortuosity of the porous microstructure and the dispersion contribution (for the fluid phase). The other transport properties associated with the classical diffusion/convection modes are given by Quintard, Kaviany, et al. (1997).

A.4.3 The semi-transparent / transparent (ST/T) case

In this configuration, more common than the previous ST/ST case, the solid phase is semi-transparent while the fluid one is transparent. The ST/T case is a particular case of the ST/ST configuration. The major difference lies in the zero value of the radiative energy generation rate P_f^R and its average $\langle P_f^R \rangle^{mf}$. The closure variables r_{ff} and r_{fs} are consequently removed from the closure relations (A.60) and (A.61). The reduction of the number of closure variables leads to the removal of closure problem IV (Eqs. (A.40a)). Closure problem V remains unchanged.



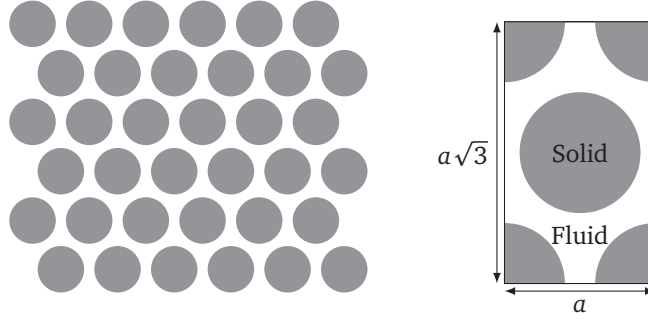


Figure A.3: Geometry of the equilateral array of cylinders.

The macroscopic closed form is made of Eqs. (A.64) and (A.69) in which every term associated with $\langle p_f^R \rangle^{mf}$ is removed. The expressions of the effective properties involved remain unchanged.

A.5 Numerical determination of the averaged properties

This section concerns the determination of the effective transport properties associated with radiation in the closed form of the macroscopic equations for the opaque/transparent (O/T) case (Eqs. (A.64) and (A.69)). A simple case, in which $\alpha = 0$, is considered. It corresponds to a case in which the deviation field $\tilde{\varphi}_w^R$ of the radiation flux is negligible. This corresponds to steps 1 and 2 of the iterative sequence mentioned in Sect. A.4.1.3. The associated closure problems are solved in unit cells where the solid phase is composed of cylinders arranged in an equilateral triangle array (see Fig. A.3). Numerical calculations are performed using the COMSOL Multiphysics software package, for different values of the conductivity ratio k_s/k_f and of the cell Péclet number defined by

$$\text{Pe} = \frac{\rho_f c_{pf} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f l_f}{k_f} \quad (\text{A.72})$$

The validation of the numerical solutions of the closure problems has been performed by comparing the solutions of closure problems I-III with the data

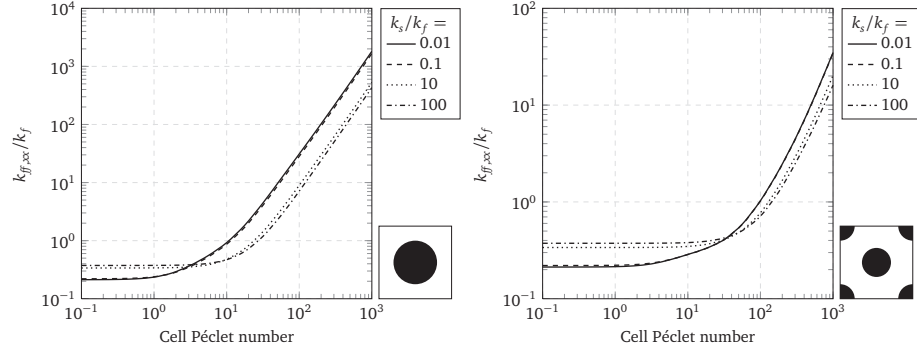
A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

Figure A.4: Longitudinal thermal dispersion tensor for in-line (left) and staggered array of cylinders (right). $\Pi_f = 0.38$.

provided by Quintard, Kaviany, et al. (1997) for inline and staggered arrays of cylinders, with a porosity $\Pi_f = 0.38$. For conciseness, only the longitudinal thermal dispersion coefficient is represented in Fig. A.4 but all the averaged properties have been compared. As expected, a diffusion regime is observed at small values of the Péclet number, while an asymptotic dispersive regime is found at large Péclet number. The influence of the conductivity ratio is also in quantitative agreement with the results presented by Quintard, Kaviany, et al. (1997): changes are significant only for $0.1 \leq k_s/k_f \leq 10$. Very good agreement with the data provided by Quintard, Kaviany, et al. (1997) is found for the other dispersion-diffusion coefficients and for the volumetric heat transfert coefficient. Discrepancies have been observed in the results for the pseudo-convective vectors $\mathbf{u}_{\gamma_1\gamma_2}$; however, since no additional reference data has been published, the interpretation of these discrepancies remains unsure.

As shown in Sect. A.4.1.3, the closed form of the macroscopic conservation equations for an opaque/transparent configuration (Eqs. (A.41), (A.44)) involve the additional averaged properties ξ , \mathbf{p}_f and \mathbf{p}_s , associated with radiation effects, which depend on the closure variables r_f and r_s associated with closure problem IV.

The distribution coefficient ξ and on the vectors \mathbf{p}_γ are represented in Fig. A.5 and Fig. A.6, respectively, for a porosity $\Pi_f = 0.80$. Only the relevant conductivity ratios are considered: $k_s/k_f < 1$ can only occur if the fluid is a liquid, which cannot be considered as transparent. ξ hardly depends on the

A.6. Conclusion

Péclet number while it is very sensitive to the conductivity ratio. These results are consistent with those obtained by Quintard and Whitaker (2000) for a generic uniform heterogeneous source term. Fig. A.6 shows that the order of magnitude of the radiative coefficient $A\mathbf{p}_s$ is much smaller than its counterpart in the fluid phase $A\mathbf{p}_f$. An estimate of the associated terms in the macroscopic energy equations can be established based on the values presented in Fig. A.5 and Fig. A.6. In the considered case, we have:

$$\frac{\nabla \cdot (A\mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m)}{A(1-\xi) \langle \varphi_w^R \rangle^m} = \mathcal{O} \left(A\mathbf{p}_s \frac{l_f}{L} \frac{1}{1-\xi} \right). \quad (\text{A.73})$$

where l_f is the typical pore size and L is the size of the macroscopic system. This estimate is based on the following assumption:

$$A = \mathcal{O} \left(\frac{1}{l_f} \right). \quad (\text{A.74})$$

The scale separation constraint also requires that

$$\frac{l_f}{L} \ll 1. \quad (\text{A.75})$$

In the conditions considered, we have

$$1 - \xi = \mathcal{O}(1). \quad (\text{A.76})$$

Since the values of $A\mathbf{p}_s$ are smaller than 10^{-2} , then $\nabla \cdot (A\mathbf{p}_s \langle \varphi_w^R \rangle^m)$ will always be negligible compared to the radiative source term in the solid phase $A(1-\xi) \langle \varphi_w^R \rangle^m$. Since estimating the value of $\langle \varphi_w^R \rangle^m$ is difficult, comparing $\nabla \cdot (A\mathbf{p}_f \langle \varphi_w^R \rangle^m)$ with terms in its macroscopic equation other than the radiative source term $A\xi \langle \varphi_w^R \rangle^m$ (which should be small in most cases due to the small value of ξ) cannot be done without additional information.

A.6 Conclusion

In this paper, a coupled upscaling analysis has been developed in order to derive a macroscopic model for heat transfer, including radiation, in porous media subjected to high temperature. The averaging procedure, based on local thermal non-equilibrium, has been performed by applying a volume averaging



A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

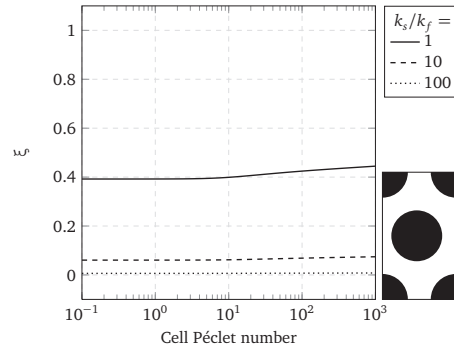


Figure A.5: Distribution coefficient. $\Pi_f = 0.80$

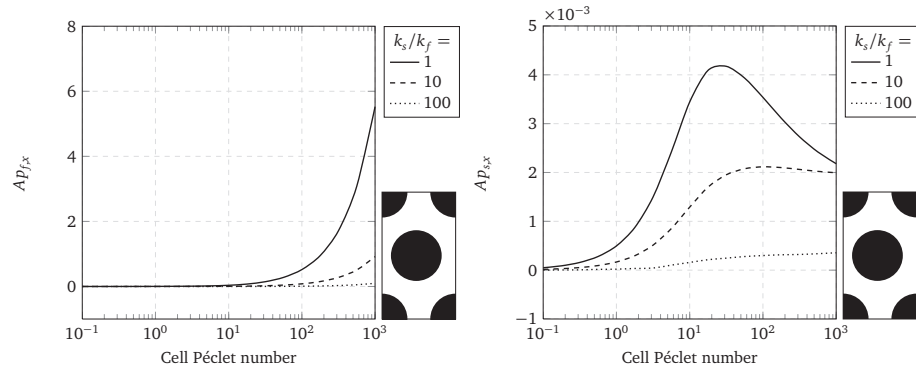


Figure A.6: Radiative flux average coefficient for the fluid (left) and the solid (right) phases. $\Pi_f = 0.80$



A.6. Conclusion

method to the local energy conservation equations accounting for radiation. A specific statistical homogenization has been performed for radiation, leading to the radiative properties characterized by statistical continuous functions defined in the whole system. When non-Beerian phases are considered, the radiation model is based on the Generalized Radiative Transfer Equation (GRTE) and in some cases on the radiative Fourier law.

The main results regarding the present analysis can be summed up as follows. First, coupled upscaling was achieved in spite of the non-material nature of the radiative heat transfer. The length scale constraints imposed by the volume averaging method were found to be compatible with the characteristic length scale of the radiative statistical approach. Finally, the radiation emission modeling depends on the temperature field of the material system which must be compatible with the statistical definition of the phase for radiation. Indeed, for a semi-transparent phase, this temperature is obtained by averaging the local temperature using the radiative intrinsic average while a radiative interface average is used for an opaque phase.

For the three solid/fluid configurations considered (opaque / transparent, semi-transparent / semi-transparent and semi-transparent / transparent), macroscopic thermal non-equilibrium models have been obtained and associated closure problems for the determination of the effective transfer properties have been derived. For each phase, additional macroscopic terms due to radiation have been found. The two additional terms found in the most common case (O/T) represent a diffusive flux and a spatial distribution of the macroscopic volumetric source term, both due to the radiative flux at the fluid/solid interface. For the symmetrical ST/ST case, the five additional macroscopic terms (only two for the ST/T case) stand for the volumetric phase repartition and the exchange between phases due to the radiative energy generation rate. The closure problems for the related closure variables have been derived. Some of these variables contain contributions associated with both the tortuosity of the porous microstructure and the dispersion contribution (for the fluid phase). Their numerical determination on realistic structures and the calculation of the macroscopic terms due to radiation in a simplified configuration will be the subject of a specific study.

As a conclusion, it is interesting to note that the coupled upscaling procedure for heat transfer in porous media including radiation gives rise to technical characteristics similar to those encountered during the averaging procedure of homogeneous or heterogeneous reactive transport. In both cases, one of the main difficulties is due to the fact that interfacial and volumetric source terms

A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

depend on the local fields (temperature or concentration for instance). This challenge could be addressed by developing a downscaling procedure in order to obtain the local fields from the resolution of the macroscopic problem.

References

- Baillis, D. and J.-F. Sacadura (2000). "Thermal radiation properties of dispersed media: theoretical prediction and experimental characterization". In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 67.5 (2000), pp. 327–363.
- Bellet, F., E. Chalopin, F. Fichot, E. Iacona, and J. Taine (2009). "RDFI determination of anisotropic and scattering dependent radiative conductivity tensors in porous media: Application to rod bundles". In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.5-6 (2009), pp. 1544–1551.
- Carbonell, R. G. and S. Whitaker (1984). "Heat and mass transfer in porous media". In: *Fundamentals of transport phenomena in porous media* 82 (1984), p. 121.
- Chahlaoui, M., F. Bellet, F. Fichot, and J. Taine (2012). "Radiative transfer within non Beerian porous media with semitransparent and opaque phases in non equilibrium: Application to reflooding of a nuclear reactor". In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55.13-14 (2012), pp. 3666–3676.
- Consalvi, J. L., B. Porterie, and J. C. Loraud (2002). "A formal averaging procedure for radiation heat transfer in particulate media". In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45.13 (2002), pp. 2755–2768.
- Gomart, H. and J. Taine (2011). "Validity criterion of the radiative Fourier law for an absorbing and scattering medium". In: *Physical Review E* 83.2 (2011), pp. 1–8.
- Gray, W. G. (1975). "A derivation of the equations for multi-phase transport". In: *Chemical Engineering Science* 30.2 (1975), pp. 229–233.
- Gusarov, A. V. (2008). "Homogenization of radiation transfer in two-phase media with irregular phase boundaries". In: *Physical Review B* 77.14 (2008), pp. 1–14.
- Haussener, S., P. Coray, W. Lipiński, P. Wyss, and A. Steinfeld (2010). "Tomography-Based Heat and Mass Transfer Characterization of Reticulate Porous Ceramics for High-Temperature Processing". In: *Journal of Heat Transfer* 132.2 (2010), p. 023305.

References

- Haussener, S., W. Lipiński, J. Petrasch, P. Wyss, and A. Steinfeld (2009). "Tomographic Characterization of a Semitransparent-Particle Packed Bed and Determination of its Thermal Radiative Properties". In: *Journal of Heat Transfer* 131.7 (2009), p. 072701.
- Haussener, S., W. Lipiński, P. Wyss, and A. Steinfeld (2010). "Tomography-Based Analysis of Radiative Transfer in Reacting Packed Beds Undergoing a Solid-Gas Thermochemical Transformation". In: *Journal of Heat Transfer* 132.6 (2010), p. 061201.
- Lipiński, W., D. Keene, S. Haussener, and J. Petrasch (2010). "Continuum radiative heat transfer modeling in media consisting of optically distinct components in the limit of geometrical optics". In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 111.16 (2010), pp. 2474–2480.
- Lipiński, W., J. Petrasch, and S. Haussener (2010). "Application of the spatial averaging theorem to radiative heat transfer in two-phase media". In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 111.1 (2010), pp. 253–258.
- Moyne, C. (1997). "Two-equation model for a diffusive process in porous media using the volume averaging method with an unsteady-state closure". In: *Advances in Water Resources* 20.2-3 (1997), pp. 63–76.
- Petrasch, J., S. Haussener, and W. Lipiński (2011). "Discrete vs. continuum-scale simulation of radiative transfer in semitransparent two-phase media". In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 112.9 (2011), pp. 1450–1459.
- Petrasch, J., P. Wyss, and A. Steinfeld (2007). "Tomography-based Monte Carlo determination of radiative properties of reticulate porous ceramics". In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 105.2 (2007), pp. 180–197.
- Quintard, M., M. Kaviany, and S. Whitaker (1997). "Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties". In: *Advances in Water Resources* 20.2-3 (1997), pp. 77–94.
- Quintard, M., B. Ladevie, and S. Whitaker (2000). "Effect of homogeneous and heterogeneous source terms on the macroscopic description of heat transfer in porous media". In: *Energy Engineering* 2. January (2000), pp. 482–489.
- Quintard, M. and S. Whitaker (1993a). "One- and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems". In: *Advances in Heat Transfer* 23 (1993), p. 369.

A. PUBLICATION SOUMISE À LA REVUE *Transport in Porous Media*

- (1993b). “Transport in ordered and disordered porous media: volume-averaged equations, closure problems, and comparison with experiment”. In: *Chemical Engineering Science* 48.14 (1993), pp. 2537–2564.
- Quintard, M. and S. Whitaker (1994). “Transport in ordered and disordered porous media IV: Computer generated porous media for three-dimensional systems”. In: *Transport in Porous Media* 15.1 (1994), pp. 51–70.
- (2000). “Theoretical Analysis of Transport in Porous Media”. In: *Handbook of Heat Transfer in Porous Media*. 2000. Chap. 1, pp. 1–52.
- Taine, J., F. Bellet, V. Leroy, and E. Iacona (2010). “Generalized radiative transfer equation for porous medium upscaling: Application to the radiative Fourier law”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.19-20 (2010), pp. 4071–4081.
- Taine, J. and E. Iacona (2012). “Upscaling Statistical Methodology for Radiative Transfer in Porous Media: New Trends”. In: *Journal of Heat Transfer* 134.3 (2012), p. 031012.
- Tancrez, M. and J. Taine (2004). “Direct identification of absorption and scattering coefficients and phase function of a porous medium by a Monte Carlo technique”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.2 (2004), pp. 373–383.
- Torquato, S. and B. Lu (1993). “Chord-length distribution function for two-phase random media”. In: *Physical Review E* 47.4 (1993), p. 2950.
- Valdés-Parada, F. J., B. Goyeau, and J. A. Ochoa-Tapia (2006). “Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid: Jump boundary conditions”. In: *Chemical Engineering Science* 61.5 (2006), pp. 1692–1704.
- Whitaker, S. (1998). “Coupled transport in multiphase systems: a theory of drying”. In: *Advances in Heat Transfer* 31 (1998), pp. 1–104.
- (1999). *The Method of Volume Averaging*. Ed. by J. Bear. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- Wood, B. D., M. Quintard, and S. Whitaker (2000). “Jump conditions at non-uniform boundaries: the catalytic surface”. In: *Chemical Engineering Science* 55.22 (2000), pp. 5231–5245.
- Zeghondy, B., E. Iacona, and J. Taine (2006a). “Determination of the anisotropic radiative properties of a porous material by radiative distribution function identification (RDFI)”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49.17-18 (2006), pp. 2810–2819.



References

- (2006b). “Experimental and RDFI calculated radiative properties of a mul-lite foam”. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49.19-20 (2006), pp. 3702–3707.



Annexe B

Résolution numérique de problèmes de fermeture

C E CHAPITRE présente la comparaison des solutions données par l'outil de calcul numérique COMSOL Multiphysics pour la résolution des problèmes de fermeture pour le cas traité au chapitre 4 avec des données de référence. COMSOL Multiphysics est un environnement de simulation multiphysique prenant en charge toutes les étapes de la simulation numérique des problèmes qu'il permet de traiter : modélisation de la géométrie, maillage, résolution numérique du problème physique, visualisation et post-traitement des données. Il est basé sur la méthode des éléments finis. Il est utilisé ici dans sa version 4.2a (version 4.2.1.110) sur un nœud SGI Altix CH1103 comprenant deux processeurs quadri-cœurs Intel Xeon E5520 cadencés à 2,26 GHz et 48 Go de mémoire (six cœurs et 40 Go de mémoire disponibles au maximum).

On résout ici les problèmes de fermeture présentés par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) et QUINTARD et WHITAKER (2000) afin de déterminer les propriétés effectives de transport apparaissant dans un modèle de transfert thermique à deux températures prenant en compte la dispersion thermique. L'écoulement, représenté au moyen du modèle de Stokes, n'est pas influencé par le bilan d'énergie. Ces problèmes de fermeture sont rappelés à la section 4.3.2.

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE

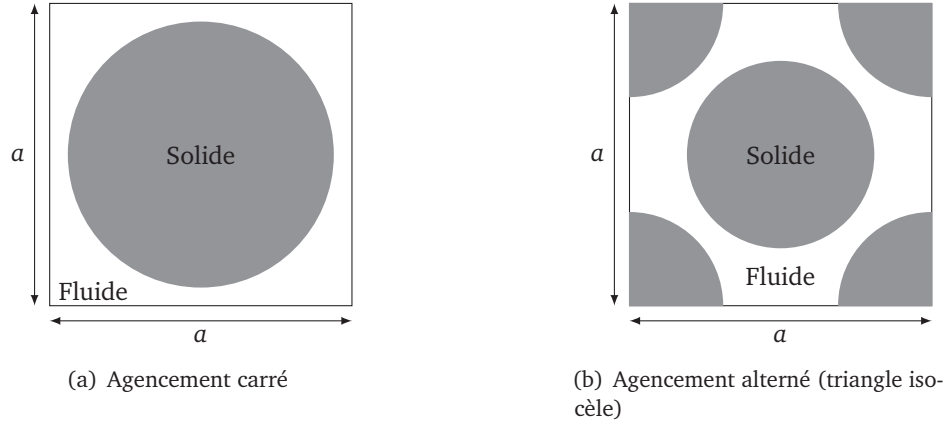


FIGURE B.1: Géométrie des agencements considérés.

B.1 Géométrie

Les milieux caractérisés sont les milieux périodiques considérés par QUINTARD et WHITAKER (1993a, 2000) et QUINTARD, KAVIANY et al. (1997). Ils sont constitués de cylindres disposés selon un agencement carré (*inline*) ou alterné (*staggered*). Le volume de prise de moyenne est un carré dont le côté est égal à l'espacement a entre les centres de deux cylindres consécutifs d'une rangée (voir figure B.1). La porosité Π_f considérée est égale à 0,38.

B.2 Champ de vitesse

Méthodes numériques. Des éléments finis linéaires (P1) sont utilisés pour discrétiser les composantes du champ de vitesse et le champ de pression. Le problème peut être adimensionné et n'est donc résolu qu'une seule fois. On utilise le solveur de systèmes linéaires direct PARDISO. La sensibilité au maillage de la solution obtenue est contrôlée pour des maillages comportant de 1000 à 10^5 éléments environ. On utilise comme variables de contrôle la vitesse moyenne adimensionnée, définie par

$$\left\| \langle \mathbf{v}_f \rangle^{\text{mf}+} \right\| = \frac{\left\| \langle \mathbf{v}_f \rangle^{\text{mf}} \right\|}{v_{\text{ref}}} \quad (\text{B.1})$$



B.3. Propriétés effectives de transport

avec

$$v_{\text{ref}} = \frac{a \delta p}{\mu_f}, \quad (\text{B.2})$$

et la vitesse maximale adimensionnée définie par

$$v_{\text{max}}^+ = \max(\|v_f^+\|) \quad (\text{B.3})$$

avec

$$v_f^+ = \frac{v_f}{\|\langle v_f \rangle^f\|}. \quad (\text{B.4})$$

Résultats. Les résultats sont peu sensibles au maillage (moins de 1 % de variations des variables de contrôle sur les nombres de mailles considérés). On opte, pour assurer une interpolation de bonne qualité lors de la résolution des problèmes de fermeture, pour un maillage fin (10 000 éléments environ). Le champ de vitesse adimensionné v_f^+ résultant de ces calculs est représenté sur la figure B.2.

B.3 Propriétés effectives de transport

Seules les composantes selon x des champs de variables de fermeture vectorielles sont déterminées, l'application visée dans le chapitre 4 étant unidimensionnelle dans la direction x . Les propriétés effectives sont paramétrées en fonction d'un nombre de Péclet de cellule défini par

$$\text{Pe} = \frac{\rho_f c_{pf} \langle v_f \rangle^{mf} a}{k_f}. \quad (\text{B.5})$$

Les calculs sont effectués pour des valeurs de Pe allant de 0,1 à 1000.

Méthodes numériques. On utilise une discrétisation en éléments finis quadratiques (P2). COMSOL Multiphysics utilise une version amortie de la méthode de Newton (*COMSOL Multiphysics Reference Guide (v4.2a)*, 2011) permettant de résoudre des problèmes de la forme

$$f(U) = 0 \quad (\text{B.6})$$

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE

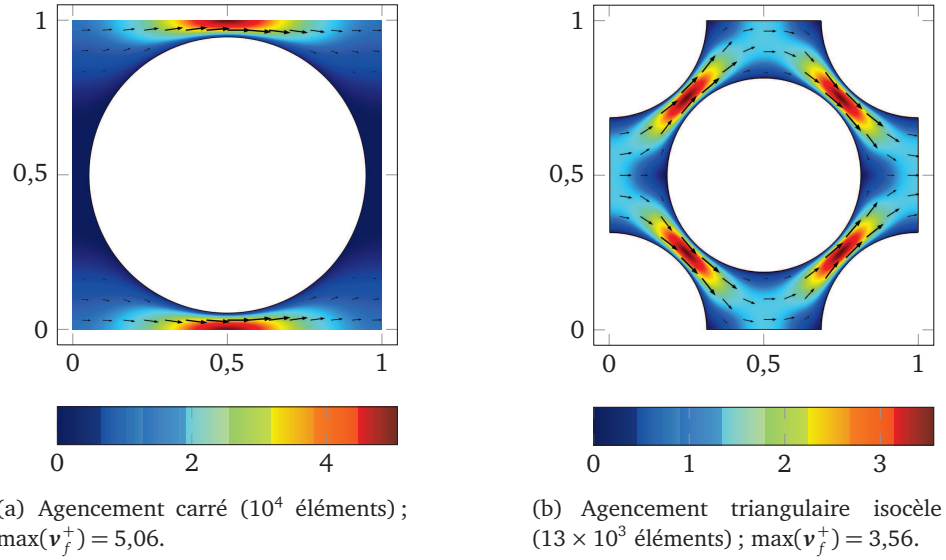


FIGURE B.2: Représentation des champs \mathbf{v}_f^+ et $\|\mathbf{v}_f^+\|$, ainsi que du maillage utilisé. Les coordonnées sont adimensionnées par la taille a de la cellule.

où U est le vecteur solution. À partir d'une valeur initiale U_0 , l'algorithme descend vers la solution du système. Un itéré U_{n+1} est calculé à partir du précédent par

$$U_{n+1} = U_n + \lambda \delta U \quad (\text{B.7})$$

où δU est obtenu en résolvant

$$f'(U_n) \delta U = -f(U_n). \quad (\text{B.8})$$

$f'(U_n)$ est la matrice jacobienne et λ est le facteur d'amortissement. À chaque itération n , une erreur E_n est obtenue en résolvant

$$f'(U_{n-1}) E_n = -f(U_n). \quad (\text{B.9})$$

On tire de E_n une erreur relative (scalaire) en le normalisant par la norme de l'itéré en cours U_n . L'erreur relative est utilisée dans le critère de convergence de la méthode. Si l'erreur relative ne décroît pas d'une itération à la suivante, λ est réduit et l'itération en cours est recommencée. Le solveur direct PARDISO est utilisé pour inverser les systèmes linéaires.

B.3. Propriétés effectives de transport

Le maillage utilisé est composé de triangles de taille caractéristique uniforme. On utilise des maillages de 9000 éléments environ.

Tenseurs de conductivité effective. Les résultats de QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) sur les composantes $k_{ff,xx}$, $k_{sf,xx}$ et $k_{ss,xx}$ des tenseurs de conductivité sont reproduits avec une précision satisfaisante. Ils sont présentés sur les figures B.3 et B.4 représentent ces coefficients ainsi que $k_{fs,xx}$ pour les deux agencements considérés. On retrouve le régime diffusif pour $Pe \lesssim 1$ pour tous les coefficients et le comportement asymptotique en Pe^n pour $Pe > 100$ pour le coefficient $k_{ff,xx}$.

Vecteurs pseudo-convectifs. Les vecteurs pseudo-convectifs $u_{ff,x}$, $u_{fs,x}$ et $u_{sf,x}$ sont représentés (normalisés) pour un agencement carré sur la figure B.5. Les valeurs de $u_{ff,x}$ et $u_{fs,x}$ sont proches de celles obtenues par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997). En revanche, celles obtenues pour $u_{sf,x}$ diffèrent fortement de celles présentées par ces auteurs et sont proches de celles de $u_{fs,x}$. Les différents vecteurs pseudo-convectifs normalisés ne semblent pas passer par un extremum local dans l'intervalle de valeurs du nombre de Péclet considéré. En raison de l'absence de détermination expérimentale de ces coefficients, la source des différences avec les résultats des simulations de QUINTARD, KAVIANY et al. (1997) n'a pas été identifiée. Cependant, les différences constatées ne devraient pas avoir d'influence significative : les écarts sur les valeurs de $u_{ff,x}$ et $u_{fs,x}$ sont faibles, et dans les gammes de valeurs où $u_{sf,x}$ est non-négligeable devant 1, les valeurs obtenues sont proches de celles obtenues par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997).

Les figures B.5 et B.6 représentent, à titre indicatif, les coefficients non présentés par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997).

Coefficient d'échange. Les valeurs du coefficient d'échange adimensionné, représenté sur la figure B.7, sont en bon accord avec les valeurs obtenues par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997).

Coefficient de distribution. Le coefficient de distribution ξ est représenté sur la figure B.8 pour les agencements carré et alterné. On retrouve également des valeurs proches de celles présentées par QUINTARD et WHITAKER (2000).

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE

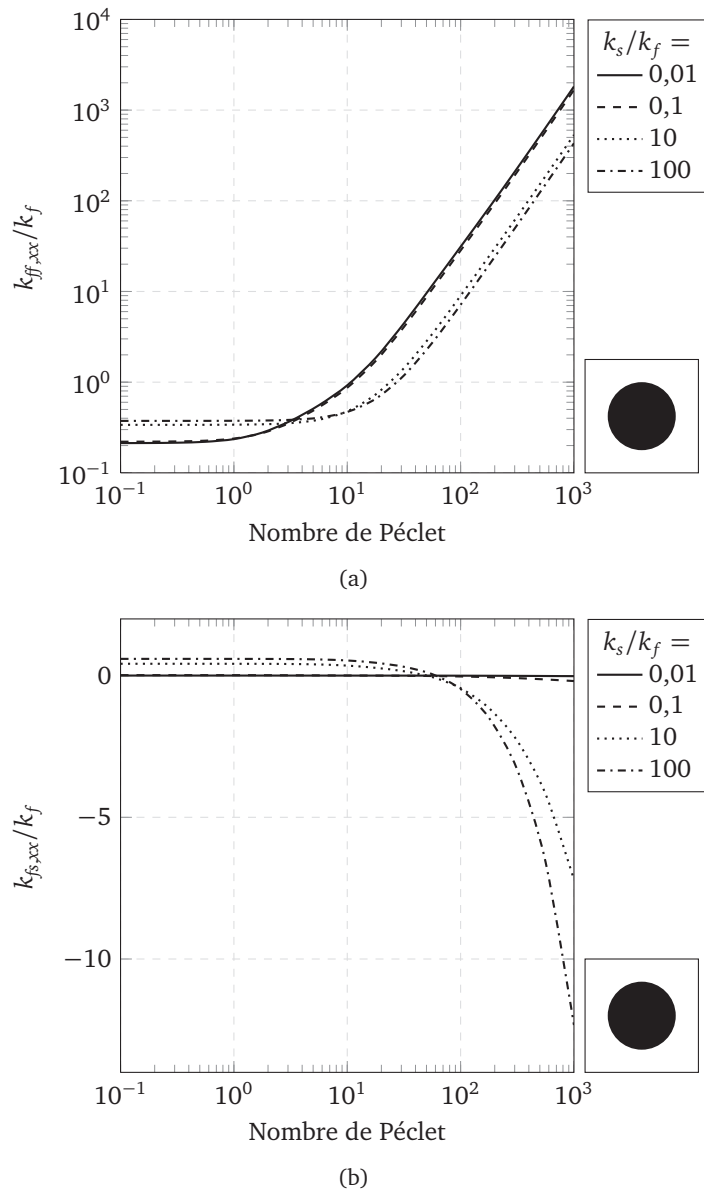
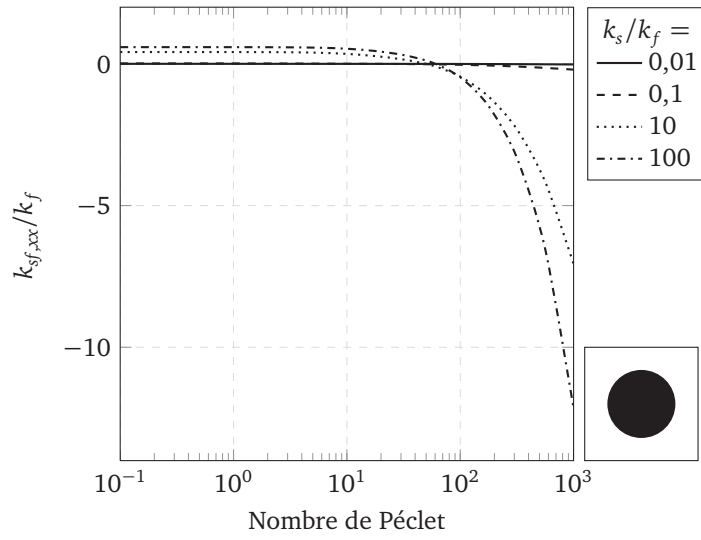
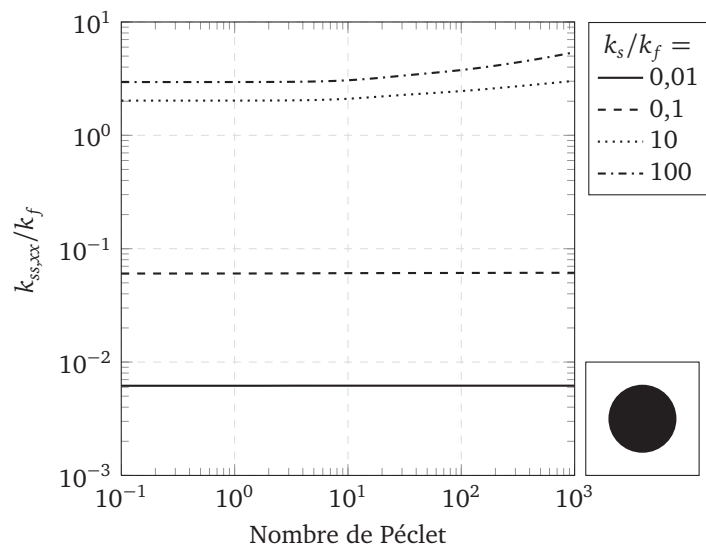


FIGURE B.3: Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement carré).

B.3. Propriétés effectives de transport



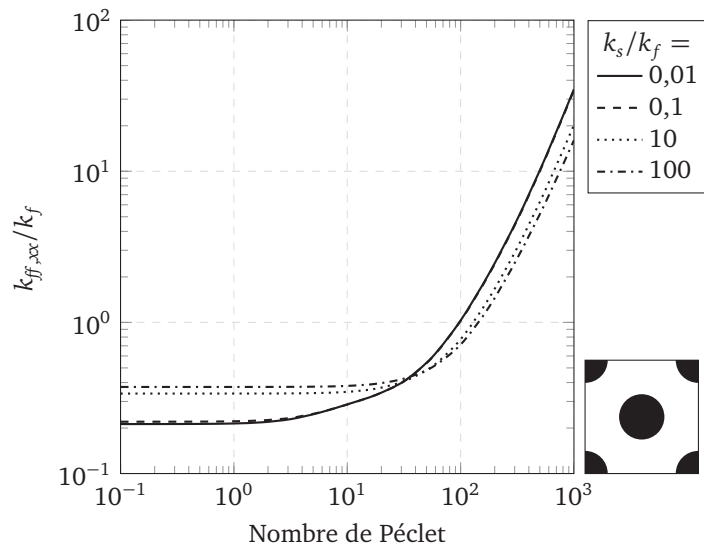
(c)



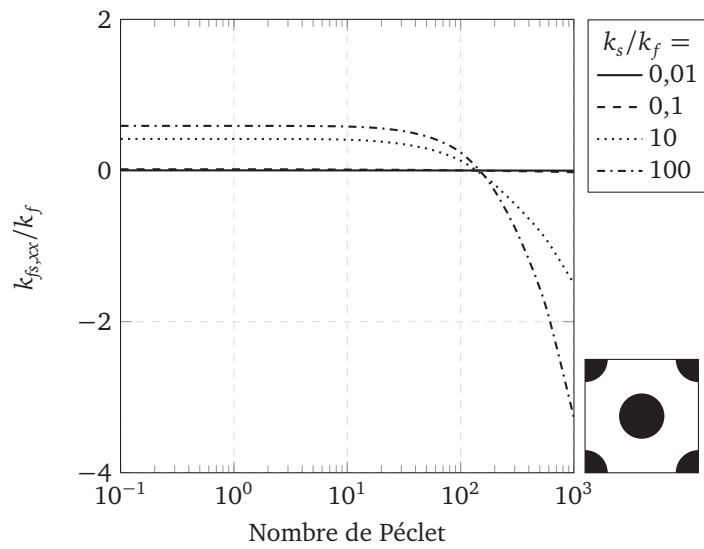
(d)

FIGURE B.3: Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement carré).

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE



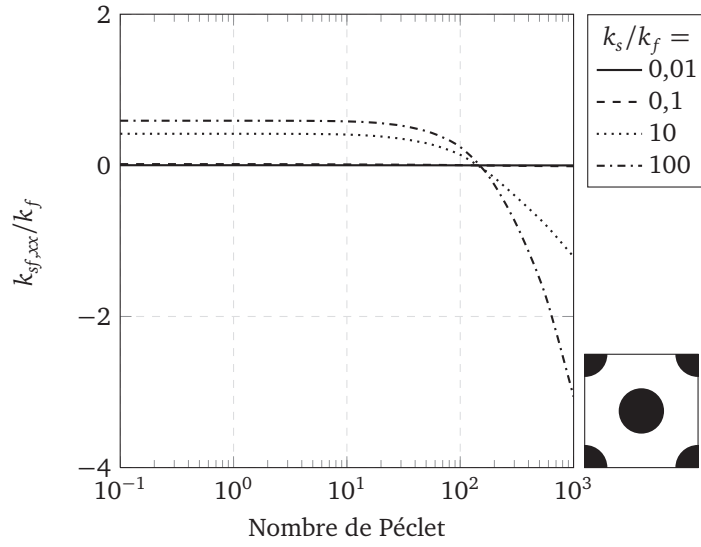
(a)



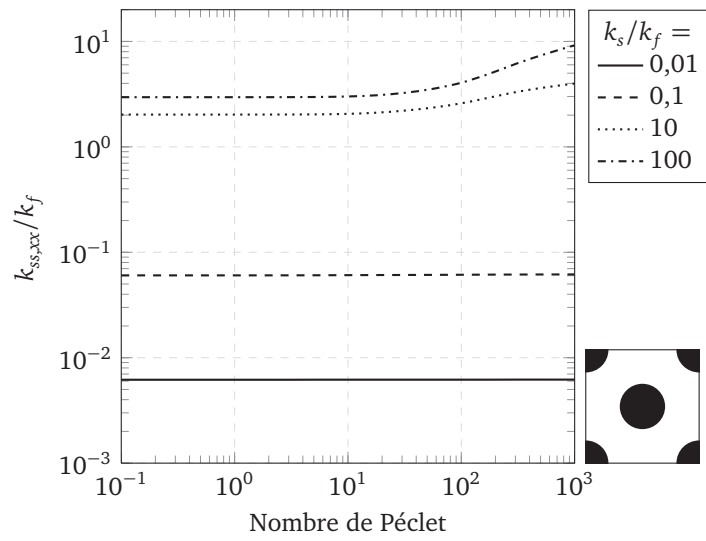
(b)

FIGURE B.4: Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement alterné).

B.3. Propriétés effectives de transport



(c)



(d)

FIGURE B.4: Coefficients longitudinaux des tenseurs de conductivité (agencement alterné).

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE

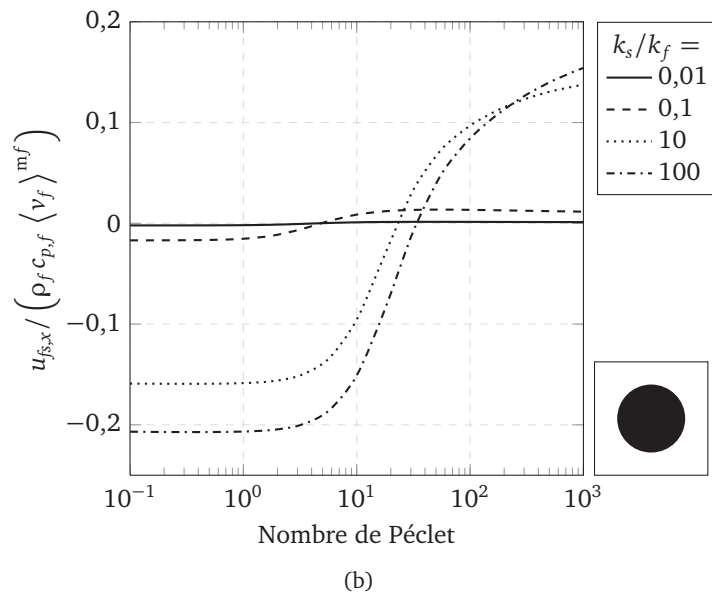
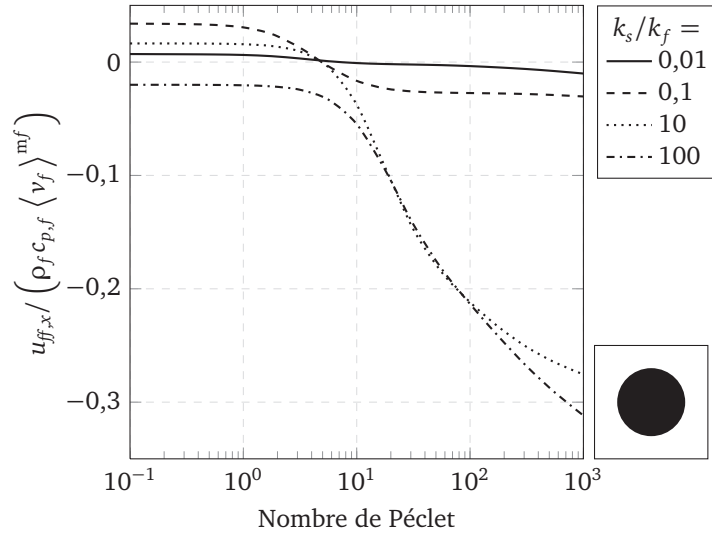
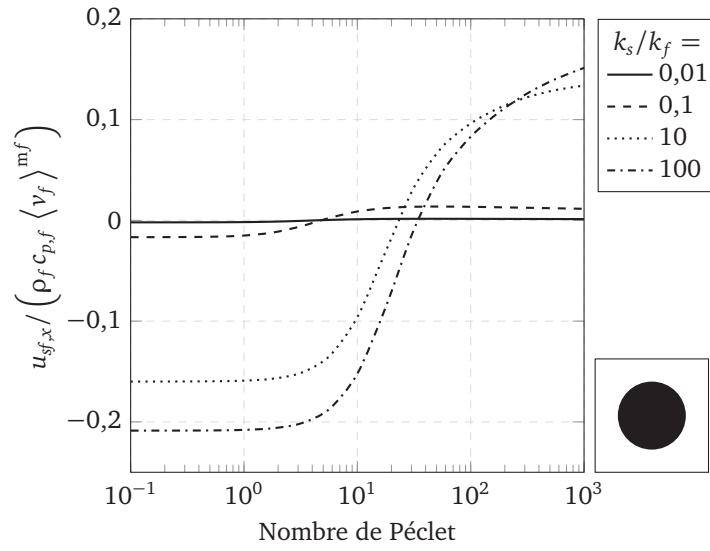
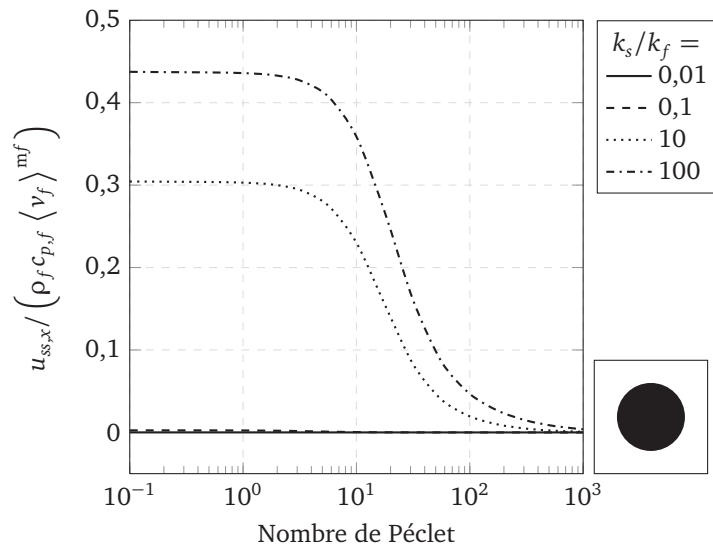


FIGURE B.5: Coefficients longitudinaux des vecteurs pseudo-convectifs (agencement carré).

B.3. Propriétés effectives de transport



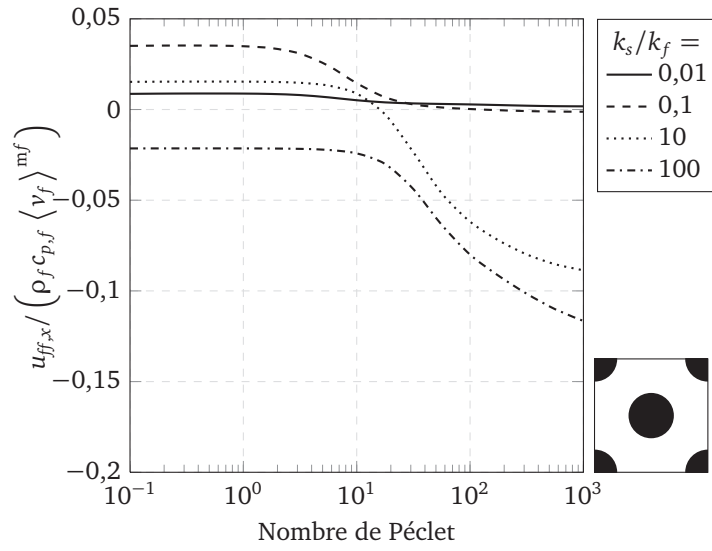
(c)



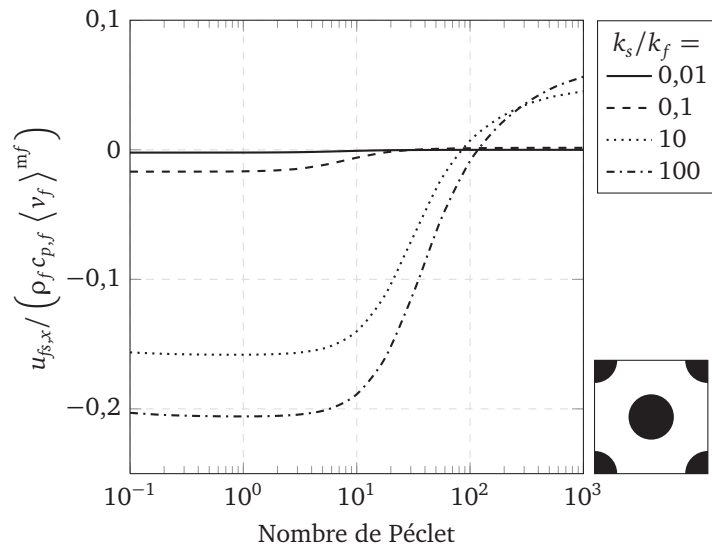
(d)

FIGURE B.5: Coefficients longitudinaux des vecteurs pseudo-convectifs (agencement carré).

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE



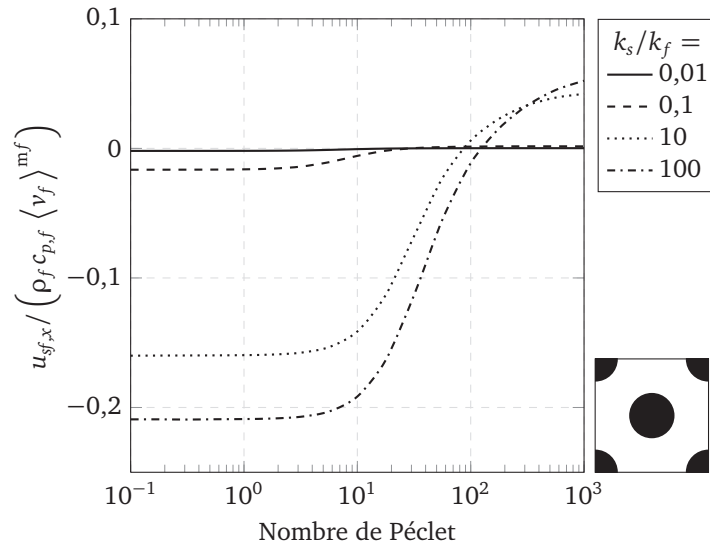
(a)



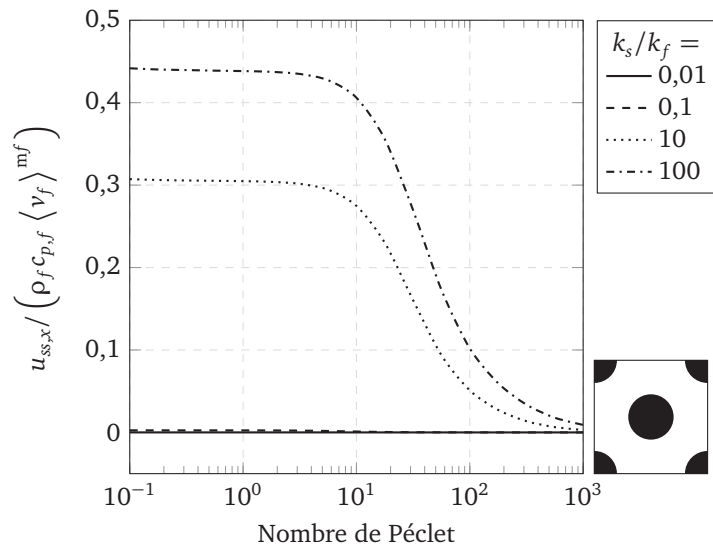
(b)

FIGURE B.6: Coefficients longitudinaux des vecteurs pseudo-convectifs (agencement alterné).

B.3. Propriétés effectives de transport



(c)



(d)

FIGURE B.6: Coefficients longitudinaux des vecteurs pseudo-convectifs (agencement alterné).

B. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES DE FERMETURE

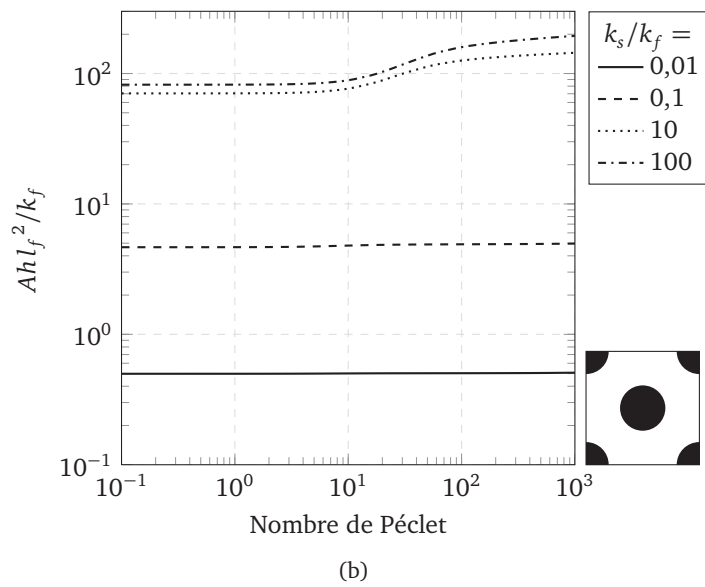
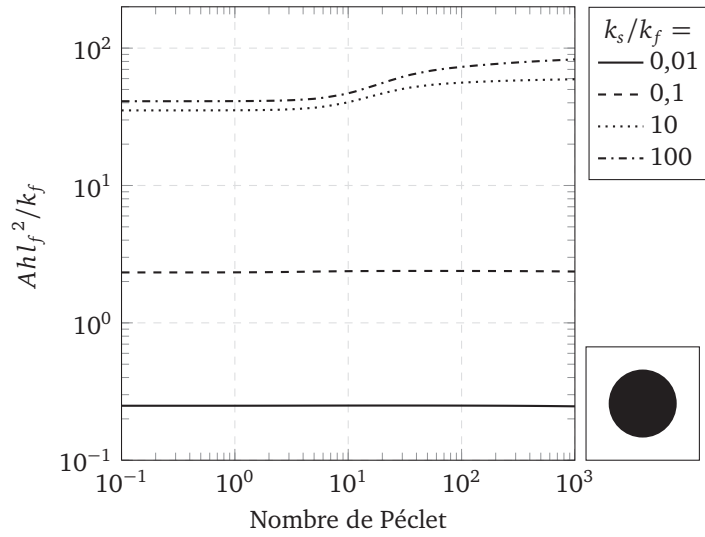
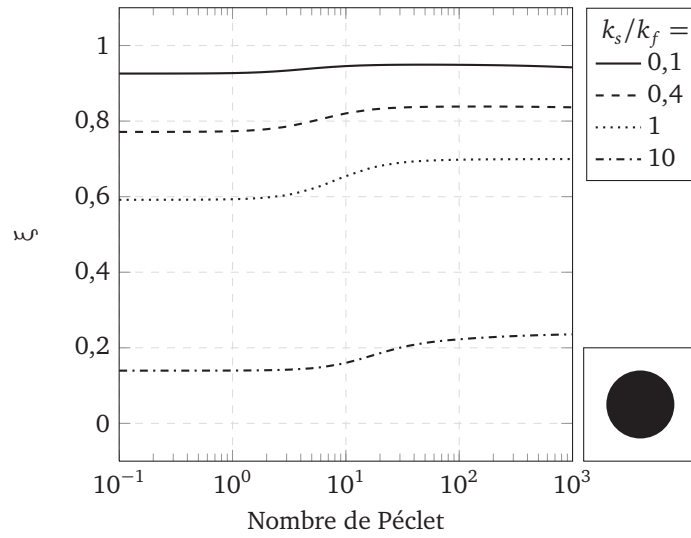
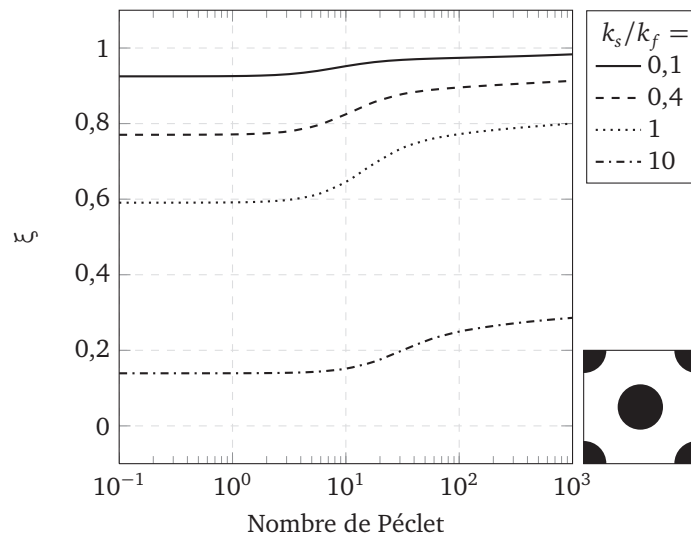


FIGURE B.7: Coefficient d'échange.

B.3. Propriétés effectives de transport



(a)



(b)

FIGURE B.8: Coefficient de distribution.





Annexe C

Étude préliminaire pour un cas macroscopique unidimensionnel

CETTE ANNEXE présente une étude préliminaire au cas macroscopique présenté au chapitre 4. Cette série de calculs préliminaires permet de vérifier que les résultats numériques obtenus ont le comportement attendu. Elle permet également d'établir l'influence des différentes propriétés effectives sur la solution. On utilisera les résultats de ces calculs pour déterminer les conditions dans lesquelles des effets du couplage conduction-convection-rayonnement seront observables.

C.1 Problème aux limites

On résout ici une version adimensionnée du problème composé des équations (4.55) à (4.63) dont on supprime les termes radiatifs. On utilise donc un modèle à deux températures sans terme source radiatif, identique à celui présenté par QUINTARD, KAVIANY et al. (1997). On a donc, pour la phase fluide :

$$\begin{aligned} \Pi_f \text{Pe} \frac{dT_f^+}{dx^+} - \text{Pe} u_{ff,x}^+ \frac{dT_f^+}{dx^+} - \text{Pe} u_{fs,x}^+ \frac{dT_s^+}{dx^+} \\ = \frac{d}{dx^+} \left(k_{ff,xx}^+ \frac{dT_f^+}{dx^+} \right) + \frac{d}{dx^+} \left(k_{fs,xx}^+ \frac{dT_s^+}{dx^+} \right) + (Ah)^+ (T_s^+ - T_f^+) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$



C. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE POUR UN CAS MACROSCOPIQUE UNIDIMENSIONNEL

Pour la phase solide, on a :

$$\begin{aligned}
 & -\text{Pe } u_{sf,x}^+ \frac{dT_f^+}{dx^+} - \text{Pe } u_{ss,x}^+ \frac{dT_s^+}{dx^+} \\
 & = \frac{d}{dx^+} \left(k_{sf,xx}^+ \frac{dT_f^+}{dx^+} \right) + \frac{d}{dx^+} \left(k_{ss,xx}^+ \frac{dT_s^+}{dx^+} \right) + (Ah)^+ (T_f^+ - T_s^+) \quad (\text{C.2})
 \end{aligned}$$

On a posé

$$T_f^+ = \frac{\langle T_f \rangle^{\text{mf}} - T_{f0}}{T_{s0} - T_{f0}}, \quad (\text{C.3})$$

$$T_s^+ = \frac{\langle T_s \rangle^{\text{ms}} - T_{f0}}{T_{s0} - T_{f0}}. \quad (\text{C.4})$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$T_f^+(x^+ = 0) = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$T_s^+(x^+ = 0) = 1, \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{dT_f^+}{dx^+}(x^+ \rightarrow \infty) = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{dT_s^+}{dx^+}(x^+ \rightarrow \infty) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Le problème est résolu au moyen de l'outil de calcul COMSOL Multiphysics v4.2a, au moyen des méthodes numériques mentionnées à la sous-section 4.4.2. Les calculs réalisés sont associés à un numéro de référence, utilisé dans le texte pour les identifier. La table C.1 regroupe l'ensemble des valeurs utilisées pour les propriétés effectives lors des différents calculs ainsi que les résultats obtenus.



C.1. Problème aux limites

TABLE C.1: Cas tests : paramètres et résultats (1/2).

Réf.	$\Pi_f \text{Pe}$	$-\text{Pe } u_{ff,x}^+$	$-\text{Pe } u_{fs,x}^+$	$-\text{Pe } u_{sf,x}^+$	$-\text{Pe } u_{ss,x}^+$	L_{eq}^+
01	0	0	0	0	0	3,26
02	0	0	0	0	0	3,99
03	1	0	0	0	0	3,69
04	0	0	0	0	1	3,69
05	0	0	0	0	0	4,39
Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{fs,xx}^+$	$k_{sf,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	T_{∞}^+
01	1	0	0	1	1	0,500
02	1	-0,5	-0,5	1	1	0,500
03	1	0	0	1	1	0,357
04	1	0	0	1	1	0,643
05	10	0	0	1	1	0,091
Réf.	$\Pi_f \text{Pe}$	$-\text{Pe } u_{ff,x}^+$	$-\text{Pe } u_{fs,x}^+$	$-\text{Pe } u_{sf,x}^+$	$-\text{Pe } u_{ss,x}^+$	L_{eq}^+
06	0	0	0	0	0	4,39
07	0	0	0	0	0	10,3
08	0	0	0	0	0	32,6
09	0	0	0	0	0	4,58
10	0	0	0	0	0	2,30
Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{fs,xx}^+$	$k_{sf,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	T_{∞}^+
06	1	0	0	10	1	0,909
07	10	0	0	10	1	0,500
08	100	0	0	100	1	0,500
09	100	0	0	1	1	0,010
10	1	0,5	0,5	1	1	0,500

Suite à la page 158

C. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE POUR UN CAS MACROSCOPIQUE UNIDIMENSIONNEL

TABLE C.1: Calculs préliminaires : paramètres et résultats (2/2).

Réf.	$\Pi_f \text{Pe}$	$-\text{Pe } u_{ff,x}^+$	$-\text{Pe } u_{fs,x}^+$	$-\text{Pe } u_{sf,x}^+$	$-\text{Pe } u_{ss,x}^+$	L_{eq}^+
11	0	0	0	0	0	1,03
12	0	0	0	0	0	0,326
13	0	0	0	0	0	3,26
14	10	0	0	0	0	4,40
15	100	0	0	0	0	4,58
Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{fs,xx}^+$	$k_{sf,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	T_{∞}^+
11	1	0	0	1	10	0,500
12	1	0	0	1	100	0,500
13	10	0	0	10	10	0,500
14	1	0	0	1	1	0,087
15	1	0	0	1	1	0,010
Réf.	$\Pi_f \text{Pe}$	$-\text{Pe } u_{ff,x}^+$	$-\text{Pe } u_{fs,x}^+$	$-\text{Pe } u_{sf,x}^+$	$-\text{Pe } u_{ss,x}^+$	L_{eq}^+
16	1000	0	0	0	0	4,60
17	1	0	0	0	0	7,31
18	10	0	0	0	0	28,7
19	100	0	0	0	0	43,8
20	1000	0	0	0	0	45,8
21	0	0	0	0	0	4,58
Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{fs,xx}^+$	$k_{sf,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	T_{∞}^+
16	1	0	0	1	1	0,001
17	1	0	0	100	1	0,975
18	1	0	0	100	1	0,613
19	1	0	0	100	1	0,095
20	1	0	0	100	1	0,010
21	1	0	0	100	1	0,990

C.2 Validation

Les calculs 01 à 06 permettent de vérifier que la solution associée à une configuration symétrique est bien symétrique et que les solutions associées à deux configurations asymétriques, symétriques l'une de l'autre, sont bien symétriques l'une de l'autre. La figure C.1 donne quelques exemples de champs de température adimensionnée en fonction de l'abscisse adimensionnée x^+ .

Colonnes de valeurs nulles omises.

Réf.	$\Pi_f Pe$	$-Pe u_{ss,x}^+$	$k_{ff,xx}^+$	$k_{fs,xx}^+$	$k_{sf,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	L_{eq}^+	T_{∞}^+
01	0	0	1	0	0	1	1	3,26	0,500
02	0	0	1	-0,5	-0,5	1	1	3,99	0,500
03	1	0	1	0	0	1	1	3,69	0,357
04	0	1	1	0	0	1	1	3,69	0,643
05	0	0	10	0	0	1	1	4,39	0,091
06	0	0	1	0	0	10	1	4,39	0,909

Données complètes : voir table C.1

C.3 Influence des conductivités effectives

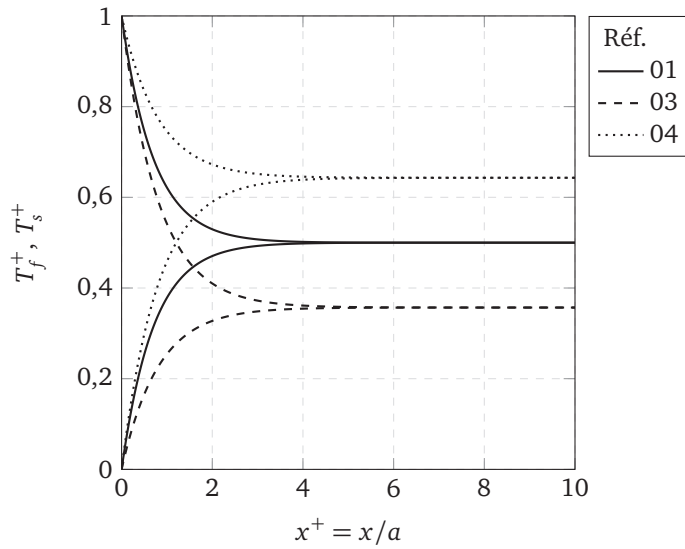
Lorsqu'on multiplie $k_{ff,xx}$ et $k_{ss,xx}$ par un facteur K , L_{eq}^+ est multipliée par \sqrt{K} (01, 07, 08). L_{eq}^+ est également limitée par la plus petite valeur entre $k_{ff,xx}$ et $k_{ss,xx}$ (01, 06, 09). La forte augmentation de la conductivité effective d'une phase devant celle de l'autre modifie de la valeur de T_{∞}^+ .

Colonnes de valeurs nulles omises.

Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	L_{eq}^+	T_{∞}^+
01	1	1	1	3,26	0,500
07	10	10	1	10,3	0,500
08	100	100	1	32,6	0,500
06	1	10	1	4,39	0,909
09	100	1	1	4,58	0,010

Données complètes : voir table C.1

C. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE POUR UN CAS MACROSCOPIQUE UNIDIMENSIONNEL



Colonnes de valeurs nulles omises.

Réf.	$\Pi_f \text{Pe}$	$-\text{Pe } u_{ss,x}^+$	$k_{ff,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	L_{eq}^+	T_∞^+
01	0	0	1	1	1	3,26	0,500
03	1	0	1	1	1	3,69	0,357
04	0	1	1	1	1	3,69	0,643

Données complètes : voir table C.1

FIGURE C.1: Champs de température adimensionnée en fonction de x^+ (validation).

Les conductivités croisées $k_{fs,xx}$ et $k_{sf,xx}$, lorsqu'elles sont positives (resp. négatives), produisent des effets semblables à la diminution (resp. augmentation) des conductivités $k_{ff,xx}$ et $k_{ss,xx}$ de la même valeur (01, 02, 10).

Colonnes de valeurs nulles omises.

Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{fs,xx}^+$	$k_{sf,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	L_{eq}^+	T_∞^+
01	1	0	0	1	1	3,26	0,500
02	1	-0,5	-0,5	1	1	3,99	0,500
10	0	0,5	0,5	1	1	2,30	0,500

Données complètes : voir table C.1

C.4. Influence du coefficient d'échange

C.4 Influence du coefficient d'échange

L_{eq}^+ est proportionnelle à $1/\sqrt{(Ah)^+}$ (01, 11, 12, 13).

Colonnes de valeurs nulles omises.

Réf.	$k_{ff,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	L_{eq}^+	T_{∞}^+
01	1	1	1	3,26	0,500
11	1	1	10	1,03	0,500
12	1	1	100	0,326	0,500
13	10	10	10	3,26	0,500

Données complètes : voir table C.1

C.5 Influence du terme convectif

Le terme convectif ne permet pas de dépasser la valeur asymptotique de L_{eq}^+ imposée par les conductivités (calculs 01, 03, 14, 15, 16 ; voir également section C.3) ; en revanche, il peut influencer fortement la valeur de T_{∞}^+ lorsque $k_{ss,xx}^+$ est suffisamment grande, l'augmentation de Pe modifie la valeur de L_{eq}^+ (calculs 21, 17, 18, 19, 20).

Colonnes de valeurs nulles omises.

Réf.	Π_f	Pe	$k_{ff,xx}^+$	$k_{ss,xx}^+$	$(Ah)^+$	L_{eq}^+	T_{∞}^+
01		0	1	1	1	3,26	0,500
03		1	1	1	1	3,69	0,357
14		10	1	1	1	4,40	0,087
15		100	1	1	1	4,58	0,010
16		1000	1	1	1	4,60	0,001
21		0	1	100	1	4,58	0,500
17		1	1	100	1	7,31	0,357
18		10	1	100	1	28,7	0,087
19		100	1	100	1	43,8	0,010
20		1000	1	100	1	45,8	0,001

Données complètes : voir table C.1

C. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE POUR UN CAS MACROSCOPIQUE UNIDIMENSIONNEL

C.6 Conclusion

Ces calculs préliminaires à l'étude macroscopique de la section 4.4 doivent être utilisés conjointement aux résultats de calcul de propriétés effectives présentés à la section 4.3. Ils indiquent que la longueur d'établissement sera faible en régime diffusif en raison des faibles valeurs des conductivités effectives adimensionnées ; L_{eq}^+ prendra probablement des valeurs inférieures ou de l'ordre de 1, ce qui ne satisfait pas la contrainte de séparation des échelles. En régime convectif et en l'absence de rayonnement, L_{eq}^+ sera limitée par la valeur de $k_{ss,xx}$, qui est très inférieure à celle de $k_{ff,xx}$ en raison de la non-connexité de la phase solide dans l'exemple du chapitre 4. Les termes croisés de conductivité auront également tendance à diminuer la longueur d'établissement en régime diffusif, et à l'augmenter aux grandes valeurs de Pe .

Bibliographie

- AGUILAR-MADERA, C. G., F. J. VALDÉS-PARADA, B. GOYEAU et J. A. OCHOA-TAPIA (2011). « One-domain approach for heat transfer between a porous medium and a fluid ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54.9-10 (2011), p. 2089–2099.
- ANGELI, P.-E., F. DUCROS, O. CIONI et B. GOYEAU (2013). « Downscaling procedure for convective heat transfer in periodic porous media ». In : *Journal of Porous Media* 16.2 (2013), p. 123–135.
- ARGENTO, C. et D. BOUVARD (1996). « A ray tracing method for evaluating the radiative heat transfer in porous media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 39.15 (1996), p. 3175–3180.
- AURIAULT, J.-L. (1991). « Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? » In : *International Journal of Engineering Science* 29.7 (1991), p. 785–795.
- AURIAULT, J.-L. et H. I. ENE (1994). « Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 37.18 (1994), p. 2885–2892.
- BAILLIS, D., M. ARDUINI-SCHUSTER et J.-F. SACADURA (2002). « Identification of spectral radiative properties of polyurethane foam from hemispherical and bi-directional transmittance and reflectance measurements ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 73.2-5 (2002), p. 297–306.
- BAILLIS, D. et J.-F. SACADURA (2000). « Thermal radiation properties of dispersed media: theoretical prediction and experimental characterization ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 67.5 (2000), p. 327–363.

BIBLIOGRAPHIE

- BARRA, A. J., G. DIEPVEN, J. L. ELLZEY et M. R. HENNEKE (2003). « Numerical study of the effects of material properties on flame stabilization in a porous burner ». In : *Combustion and Flame* 134.4 (2003), p. 369–379.
- BARRA, A. J. et J. L. ELLZEY (2004). « Heat recirculation and heat transfer in porous burners ». In : *Combustion and Flame* 137.1-2 (2004), p. 230–241.
- BELLET, F., E. CHALOPIN, F. FICHOT, E. IACONA et J. TAINE (2009). « RDFI determination of anisotropic and scattering dependent radiative conductivity tensors in porous media: Application to rod bundles ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.5-6 (2009), p. 1544–1551.
- CARBONELL, R. G. et S. WHITAKER (1984). « Heat and mass transfer in porous media ». In : *Fundamentals of transport phenomena in porous media* 82 (1984), p. 121.
- CHAHLAFI, M. (2011). « Modélisation du rayonnement thermique dans un cœur de réacteur nucléaire dégradé en présence de vapeur et de gouttes d'eau ». Thèse de doct. École Centrale Paris, 2011.
- CHAHLAFI, M., F. BELLET, F. FICHOT et J. TAINE (2012). « Radiative transfer within non Beerian porous media with semitransparent and opaque phases in non equilibrium: Application to reflooding of a nuclear reactor ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55.13-14 (2012), p. 3666–3676.
- CONSALVI, J. L., B. PORTERIE et J. C. LORAUD (2002). « A formal averaging procedure for radiation heat transfer in particulate media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45.13 (2002), p. 2755–2768.
- COQUARD, R. et D. BAILLIS (2004). « Radiative Characteristics of Opaque Spherical Particles Beds: A New Method of Prediction ». In : *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 18.2 (2004), p. 178–186.
- DARCY, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau*. Sous la dir. de V. DALMONT. Dalmont, 1856, p. 647.
- D'HUEPPE, A., M. CHANDESRI, D. JAMET et B. GOYEAU (2011). « Boundary conditions at a fluid–porous interface for a convective heat transfer problem: Analysis of the jump relations ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54.15-16 (2011), p. 3683–3693.
- DOMBROVSKY, L., L. SCHUNK, W. LIPÍŃSKI et A. STEINFELD (2009). « An ablation model for the thermal decomposition of porous zinc oxide layer heated by concentrated solar radiation ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.11-12 (2009), p. 2444–2452.

Bibliographie

- DUVAL, F. (2002). « Modélisation du renoyage d'un lit de particules : contribution à l'estimation des propriétés de transport macroscopiques ». In : (2002).
- DUVAL, F., F. FICHOT et M. QUINTARD (2004). « A local thermal non-equilibrium model for two-phase flows with phase-change in porous media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.3 (2004), p. 613–639.
- ENE, H. I. et D. POLISEVSKI (1987). *Thermal flow in porous media*. Reidel, D., 1987.
- GOMART, H. et J. TAINE (2011). « Validity criterion of the radiative Fourier law for an absorbing and scattering medium ». In : *Physical Review E* 83.2 (2011), p. 1–8.
- GOYEAU, B., D. LHUILLIER, D. GOBIN et M. VELARDE (2003). « Momentum transport at a fluid-porous interface ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46.21 (2003), p. 4071–4081.
- GRAY, W. G. (1975). « A derivation of the equations for multi-phase transport ». In : *Chemical Engineering Science* 30.2 (1975), p. 229–233.
- GUSAROV, A. V. (2008). « Homogenization of radiation transfer in two-phase media with irregular phase boundaries ». In : *Physical Review B* 77.14 (2008), p. 1–14.
- HAUSSENER, S., P. CORAY, W. LIPÍŃSKI, P. WYSS et A. STEINFELD (2010). « Tomography-Based Heat and Mass Transfer Characterization of Reticulate Porous Ceramics for High-Temperature Processing ». In : *Journal of Heat Transfer* 132.2 (2010), p. 023305.
- HAUSSENER, S., W. LIPÍŃSKI, J. PETRASCH, P. WYSS et A. STEINFELD (2009). « Tomographic Characterization of a Semitransparent-Particle Packed Bed and Determination of its Thermal Radiative Properties ». In : *Journal of Heat Transfer* 131.7 (2009), p. 072701.
- HAUSSENER, S., W. LIPÍŃSKI, P. WYSS et A. STEINFELD (2010). « Tomography-Based Analysis of Radiative Transfer in Reacting Packed Beds Undergoing a Solid-Gas Thermochemical Transformation ». In : *Journal of Heat Transfer* 132.6 (2010), p. 061201.
- HENDRICKS, T. J. et J. R. HOWELL (1996). « Absorption/Scattering Coefficients and Scattering Phase Functions in Reticulated Porous Ceramics ». In : *Journal of Heat Transfer* 118.1 (1996), p. 79.
- HISCHIER, I., D. HESS, W. LIPÍŃSKI, M. MODEST et A. STEINFELD (2009). « Heat Transfer Analysis of a Novel Pressurized Air Receiver for Concentrated Solar Power via Combined Cycles ». In : *Journal of Thermal Science and Engineering Applications* 1.4 (2009), p. 041002.

BIBLIOGRAPHIE

- HOWELL, J. R., M. HALL et J. L. ELLZEY (1996). « Combustion of hydrocarbon fuels within porous inert media ». In : *Progress in Energy and Combustion Science* 22.2 (1996), p. 121–145.
- HSU, P-F, J. R. HOWELL et R. D. MATTHEWS (1993). « A Numerical Investigation of Premixed Combustion Within Porous Inert Media ». In : *Journal of Heat Transfer* 115.3 (1993), p. 744.
- IRMAV, S. (1958). « On the theoretical derivation of Darcy and Forchheimer formulas ». In : *Trans. Am. Geophys. Union* (1958).
- KAVIANY, M. (1995). *Principles of heat transfer in porous media*. Sous la dir. de F. F. LING. T. 27. 2-3. Springer-Verlag, 1995, p. 684.
- LAURENT, M. et P-L. VUILLERMOZ (2012). *Conductivité thermique des solides*. 2012.
- LEROY, V., B. GOYEAU et J. TAINE (2013). « Coupled Upscaling Approaches For Conduction, Convection, and Radiation in Porous Media: Theoretical Developments ». In : *Transport in Porous Media* 97.3 (2013).
- LEVITZ, P. (1998). « Off-lattice reconstruction of porous media: critical evaluation, geometrical confinement and molecular transport ». In : *Advances in Colloid and Interface Science* 76-77 (1998), p. 71–106.
- LIPÍŃSKI, W., D. KEENE, S. HAUSSENER et J. PETRASCH (2010). « Continuum radiative heat transfer modeling in media consisting of optically distinct components in the limit of geometrical optics ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 111.16 (2010), p. 2474–2480.
- LIPÍŃSKI, W., J. PETRASCH et S. HAUSSENER (2010). « Application of the spatial averaging theorem to radiative heat transfer in two-phase media ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 111.1 (2010), p. 253–258.
- LORENSEN, W. E. et H. E. CLINE (1987). « Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm ». In : *Computer Graphics* 21.4 (1987), p. 163–169.
- LORETZ, M., R. COQUARD, D. BAILLIS et E. MAIRE (2008). « Metallic foams: Radiative properties/comparison between different models ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 109.1 (2008), p. 16–27.
- MAAG, G., W. LIPÍŃSKI et A. STEINFELD (2009). « Particle-gas reacting flow under concentrated solar irradiation ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.21-22 (2009), p. 4997–5004.
- MARLE, C. M. (1967). « Ecoulements monophasiques en milieux poreux ». In : *Revue de l'Institut Français du Pétrole* 22.10 (1967), p. 1467–1509.

Bibliographie

- MATHERON, G. (1965). *Les variables régionalisées et leur estimation : une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*. Masson, 1965.
- MIN, D. K. et H. D. SHIN (1991). « Laminar premixed flame stabilized inside a honeycomb ceramic ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34.2 (1991), p. 341–356.
- MOHAMMADIEN, A. A. (2000). « Thermal Dispersion – Radiation Effects on Non-Darcy Natural Convection in a Fluid Saturated Porous Medium ». In : (2000), p. 153–163.
- MOYNE, C. (1997). « Two-equation model for a diffusive process in porous media using the volume averaging method with an unsteady-state closure ». In : *Advances in Water Resources* 20.2-3 (1997), p. 63–76.
- MOYNE, C., S. DIDIERJEAN, H. AMARAL SOUTO et O. DA SILVEIRA (2000). « Thermal dispersion in porous media: one-equation model ». In : *International journal of heat and mass transfer* 43.20 (2000), p. 3853–3867.
- PETRASCH, J., S. HAUSSENER et W. LIPÍŃSKI (2011). « Discrete vs. continuum-scale simulation of radiative transfer in semitransparent two-phase media ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 112.9 (2011), p. 1450–1459.
- PETRASCH, J., P. WYSS et A. STEINFELD (2007). « Tomography-based Monte Carlo determination of radiative properties of reticulate porous ceramics ». In : *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 105.2 (2007), p. 180–197.
- QUINTARD, M., M. KAVIANY et S. WHITAKER (1997). « Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties ». In : *Advances in Water Resources* 20.2-3 (1997), p. 77–94.
- QUINTARD, M., B. LADEVIE et S. WHITAKER (2000). « Effect of homogeneous and heterogeneous source terms on the macroscopic description of heat transfer in porous media ». In : *Energy Engineering* 2.January (2000), p. 482–489.
- QUINTARD, M. et S. WHITAKER (1993a). « One- and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems ». In : *Advances in Heat Transfer* 23 (1993), p. 369.
- (1993b). « Transport in ordered and disordered porous media: volume-averaged equations, closure problems, and comparison with experiment ». In : *Chemical Engineering Science* 48.14 (1993), p. 2537–2564.
- (1994). « Transport in ordered and disordered porous media IV: Computer generated porous media for three-dimensional systems ». In : *Transport in Porous Media* 15.1 (1994), p. 51–70.

BIBLIOGRAPHIE

- QUINTARD, M. et S. WHITAKER (1995). « Local Thermal Equilibrium for transient conduction: Theory and comparison with numerical experiments ». In : *International journal of heat and mass transfer* (1995).
- (2000). « Theoretical Analysis of Transport in Porous Media ». In : *Handbook of Heat Transfer in Porous Media*. 2000. Chap. 1, p. 1–52.
- SATHE, S. B., R. PECK et T. TONG (1990). « A numerical analysis of heat transfer and combustion in porous radiant burners ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33.6 (1990), p. 1331–1338.
- SIEGEL, R. et J. R. HOWELL (2002). *Thermal Radiation Heat Transfer*. 4^e éd. Taylor & Francis Inc., 2002.
- SLATTERY, J. C. (1967). « Flow of viscoelastic fluids through porous media ». In : *AIChE Journal* (1967).
- TAINE, J., F. BELLET, V. LEROY et E. IACONA (2010). « Generalized radiative transfer equation for porous medium upscaling: Application to the radiative Fourier law ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.19-20 (2010), p. 4071–4081.
- TAINE, J. et E. IACONA (2012). « Upscaling Statistical Methodology for Radiative Transfer in Porous Media: New Trends ». In : *Journal of Heat Transfer* 134.3 (2012), p. 031012.
- TAINE, J., E. IACONA et J.-P. PETIT (2008). *Transferts thermiques*. 4^e éd. Dunod, 2008.
- TALUKDAR, P., S. C. MISHRA, D. TRIMIS et F. DURST (2004). « Combined radiation and convection heat transfer in a porous channel bounded by isothermal parallel plates ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.5 (2004), p. 1001–1013.
- TANCREZ, M. et J. TAINE (2004). « Direct identification of absorption and scattering coefficients and phase function of a porous medium by a Monte Carlo technique ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47.2 (2004), p. 373–383.
- TARTAR, L. (1980). « Incompressible fluid flow in a porous medium – convergence of the homogenization process ». In : *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*. 1980, p. 368–377.
- THE COMSOL TEAM (2011). *COMSOL Multiphysics Reference Guide (v4.2a)*. 2011.
- TORQUATO, S. et B. LU (1993). « Chord-length distribution function for two-phase random media ». In : *Physical Review E* 47.4 (1993), p. 2950.
- VALDÉS-PARADA, F. J., J. ALVAREZ-RAMÍREZ, B. GOYEAU et J. A. OCHOA-TAPIA (2009). « Jump Condition for Diffusive and Convective Mass Transfer Between a

Bibliographie

- Porous Medium and a Fluid Involving Adsorption and Chemical Reaction ». In : *Transport in Porous Media* 78.3 (2009), p. 459–476.
- VALDÉS-PARADA, F. J., B. GOYEAU et J. A. OCHOA-TAPIA (2006). « Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid: Jump boundary conditions ». In : *Chemical Engineering Science* 61.5 (2006), p. 1692–1704.
- WHITAKER, S. (1966). « The equations of motion in porous media ». In : *Chemical Engineering Science* (1966).
- (1986). « Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law ». In : *Transport in porous media* 1.1 (1986), p. 3–25.
- (1987). « The role of the volume-averaged temperature in the analysis of non-isothermal, multiphase transport phenomena ». In : *Chemical Engineering Communications* 58.1-6 (1987), p. 171–183.
- (1988). « Comments and corrections concerning the volume-averaged temperature and its spatial deviation ». In : *Chemical Engineering Communications* 70.1 (1988), p. 15–18.
- (1996). « The Forchheimer equation: a theoretical development ». In : *Transport in Porous media* 25.1 (1996), p. 27–61.
- (1998). « Coupled transport in multiphase systems: a theory of drying ». In : *Advances in Heat Transfer* 31 (1998), p. 1–104.
- (1999). *The Method of Volume Averaging*. Sous la dir. de J. BEAR. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- WOOD, B. D., M. QUINTARD et S. WHITAKER (2000). « Jump conditions at non-uniform boundaries: the catalytic surface ». In : *Chemical Engineering Science* 55.22 (2000), p. 5231–5245.
- WOOD, S. et A. T. HARRIS (2008). « Porous burners for lean-burn applications ». In : *Progress in Energy and Combustion Science* 34.5 (2008), p. 667–684.
- YANG, Y. S., J. R. HOWELL et D. E. KLEIN (1983). « Radiative Heat Transfer Through a Randomly Packed Bed of Spheres by the Monte Carlo Method ». In : *Journal of Heat Transfer* 105.2 (1983), p. 325.
- YOSHIDA, H., J. H. YUN, R. ECHIGO et T. TOMIMURA (1990). « Transient characteristics of combined conduction, convection and radiation heat transfer in porous media ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33.5 (1990), p. 847–857.
- ZEGHONDY, B., E. IACONA et J. TAINE (2006a). « Determination of the anisotropic radiative properties of a porous material by radiative distribution function identification (RDFI) ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49.17-18 (2006), p. 2810–2819.



BIBLIOGRAPHIE

ZEGHONDY, B., E. IACONA et J. TAINE (2006b). « Experimental and RDFI calculated radiative properties of a mullite foam ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49.19-20 (2006), p. 3702–3707.